МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«**Донецкая Республиканская Малая Академия Наук учащейся молодежи**»

Отделение: математика
Секция: математика

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ СТЮАРТА

Работу выполнила:
Пылько Александра Александровна, ученица 9 класса Муниципального общеобразовательного учреждения «Лицей “Интеллект” г. Донецка»
Научный руководитель:
Толпыгин Александр Егорович, учитель математики МОУ «Лицей «Интеллект» г. Донецка», специалист высшей категории, учитель-методист

Донецк – 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Треугольник является одной из важнейших геометрических фигур, повсеместно используемых в науке и технике, поэтому исследование его свойств проводится, начиная с глубокой древности.

В задачах на метрические соотношения в треугольнике часто приходится одну из вершин треугольника соединять с некоторой точкой противоположной стороны или ее продолжением и вычислять длину этого отрезка, соединяющего вершину треугольника с этой точкой. Для всех подобных задач можно доказать общий способ решения, основанный на предложении, известном как теорема Стюарта. Данная теорема значительно упрощает решение многих задач на вычисление длин отрезков в треугольнике.

Однако, если секущая пересекает две стороны треугольника, оставаясь при этом целиком внутри него, теорема Стюарта непосредственно неприменима. Поэтому мне захотелось найти некоторое обобщение этой теоремы, которого теорема Стюарта являлась бы частным случаем.

Итак, тема исследования: «Обобщение теоремы Стюарта».

Актуальность темы определяется следующими соображениями:

1) Теорема была изучена недостаточно, может быть обобщена.
2) Исследование ориентировано на возможность найти решение некоторых задач на основе данных, полученных в результате работы.

Объект исследования: метрические соотношения в треугольнике.

Предмет исследования: теорема Стюарта, ее обобщение и применение к решению задач.

Цели исследования:

1) Доказательство формулы, обобщающей теорему Стюарта.
2) Применение обобщенной формулы к решению задач.

Задачи:

1) Изучить литературу по теме.
2) Систематизировать и углубить знания.

3) Повысить качество знаний и умений.

4) Осуществить доказательство формулы, обобщающей теорему Стюарта.

5) Применить доказанную формулу к решению задач.

6) Оформить работу.

7) Создать электронную презентацию.

Методы исследования

Изучение литературы и интернет-источников; анализ и классификация информации; сравнение; аналогии; моделирование; обобщение.

Работа носит теоретико-прикладной характер, в ней известная теорема Стюарта получила дальнейшее развитие и применение.

Результаты исследования могут быть эффективно применены для решения целого ряда метрических задач.

РАЗДЕЛ 1 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ

1.1. I способ

Известная теорема Стюарта [4] выражает одно из самых общих метрических свойств треугольника. Попробуем доказать более общую теорему, для которой теорема Стюарта – частный случай.

I способ

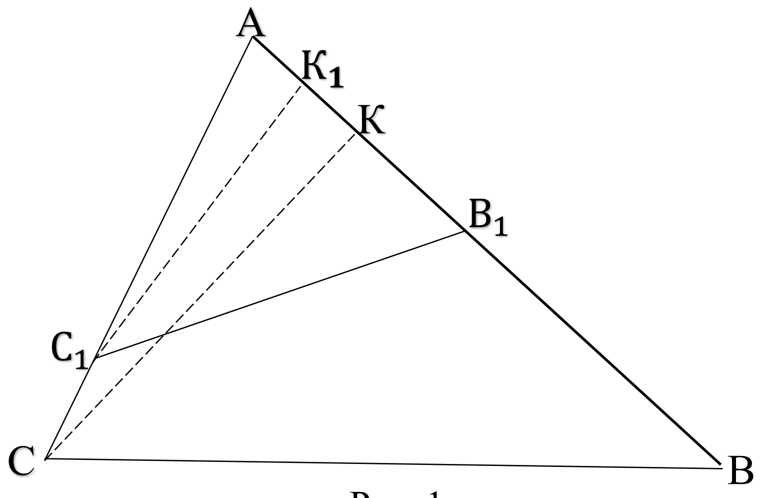


Рис. 1

BC = a

AC = в

AB = c

Пусть дан $\Delta\, ABC$ и некоторая секущая $B_1C_1 = a_1$, определяемая отрезками $AC_1 = b_1$ и $AB_1 = c_1$ (Рисунок 1).

Задача заключается в том, чтобы определить зависимость между a, b, c (стороны Δ ABC), a_1, b_1, c_1 или, иначе, определить a_1 в зависимости от других данных.

С этой целью опустим перпендикуляры *СК* и C_1K_1 на сторону *AB* и пусть *AК*=l и $AK_1 = l_1$.

Из подобия треугольников *АСК* и AC_1K_1 имеем:

$$\frac{l}{b} = \frac{l_1}{b_1}\,. \tag{1}$$

Из треугольников *ABC* и AB_1C_1 по теореме о квадрате стороны (см. Приложение 1) найдем:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cl,$$

$$a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 - 2c_1 l_1.$$

Определяем из этих равенств l и l_1 и, подставляя в (1), получаем искомое соотношение:

$$\frac{b_1^2+c_1^2-a_1^2}{b_1 c_1} = \frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\,. \qquad (2)$$

С тригонометрической точки зрения (2) выражает просто равенство удвоенных косинусов углов C_1AB_1 и CAB в одноименных треугольниках. После простых преобразований равенство (2) может быть приведено к следующему виду:

$$bb_1^2c + bc_1^2c - ba_1^2c = b^2b_1c_1 + c^2b_1c_1 - a^2b_1c_1,$$

$$a_1^2bc - a^2b_1c_1 = bb_1(b_1c - bc_1) + cc_1(bc_1 - cb_1),$$

$$a_1^2bc - a^2b_1c_1 = (cb_1 - bc_1)(bb_1 - cc_1). \qquad (3)$$

На соотношение (3) можно смотреть как на условие, выражающее, что треугольники со сторонами a, b, c, и a_1, b_1, c_1 имеют по равному углу.

Из сделанного вывода следует только <u>необходимость</u> этого условия. <u>Достаточность</u> его следует из того, что при существовании равенства (2) имеет место равенство (1), и, следовательно, подобие треугольников ACK и $A_1C_1K_1$ и равенство углов A и A_1.

Аналогично можно вывести условие, выражающее, что треугольники имеют пару углов взаимно дополнительных до 180°.

Однако, мы приведем другой вывод, имеющий то преимущество, что он объединяет оба случая.

1.2. II способ

Сохраняя прежние обозначения, допустим, что углы A и A_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны или в сумме составляют 180°.

Пусть S_1 и S обозначают площади треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.

Тогда

$$\frac{S^2}{S_1^2}=\frac{b^2c^2}{b_1^2c_1^2}. \tag{4}$$

По формуле Герона [2]

$$S_{\Delta ABC}^2=S^2=\frac{a+b+c}{2}\times\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\times\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\times\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)=$$

$$=\frac{a+b+c}{2}\times\frac{b+c-a}{2}\times\frac{a+c-b}{2}\times\frac{a+b-c}{2}=$$

$$=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}\times\frac{c^2-(a-b)^2}{4}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2+2ab-c^2)(c^2-a^2-b^2+2ab)}{16}=$$

$$=(a^2c^2-a^4-a^2b^2+2a^3b+b^2c^2-a^2b^2-b^4+2ab^3+2abc^2$$

$$-2a^3b-2ab^3+4a^2b^2-c^4+a^2c^2+c^2b^2-2abc^2)\div 16=$$

$$=\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{16};$$

Аналогично,

$$S_{\Delta A_1B_1C_1}^2=S_1^2=\frac{2a_1^2b_1^2+2a_1^2c_1^2+2b_1^2c_1^2-a_1^4-b_1^4-c_1^4}{16}.$$

Подставляем полученные выражения в (4), получаем:

$$\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{2a_1^2b_1^2+2a_1^2c_1^2+2b_1^2c_1^2-a_1^4-b_1^4-c_1^4}=\frac{b^2c^2}{b_1^2c_1^2}.$$

Умножим и разделим правую часть на 4:

$$\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{a_1^4+b_1^4+c_1^4-2a_1^2b_1^2-2a_1^2c_1^2-2b_1^2c_1^2}=\frac{4b^2c^2}{4b_1^2c_1^2}.$$

По свойству пропорции сумма предыдущих относится к сумме последующих, как один из предыдущих к своему последующему, поэтому

$$\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2}{a_1^4+b_1^4+c_1^4-2a_1^2b_1^2-2a_1^2c_1^2+2b_1^2c_1^2}=\frac{b^2c^2}{b_1^2c_1^2}$$

или, выделяя полный квадрат,

$$\frac{a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2}{a_1^4-2a_1^2(b_1^2+c_1^2)+(b_1^2+c_1^2)^2}=\frac{b^2c^2}{b_1^2c_1^2}$$

$$\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(b_1^2+c_1^2-a_1^2)^2}=\frac{b^2c^2}{b_1^2c_1^2}.$$

Извлекая из обеих частей квадратные корни, найдем:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=\pm\frac{b_1^2+c_1^2-a_1^2}{b_1c_1} \tag{5}$$

При равенстве углов A и A_1 одновременно имеют место следующие пары неравенств (исключая случай $\angle \mathrm{A}=\angle A_1=90°$):

$$\begin{cases}a^2>b^2+c^2\\a_1^2>b_1^2+c_1^2\end{cases}\qquad\begin{cases}a^2<b^2+c^2\\a_1^2<b_1^2+c_1^2\end{cases}.$$

Если же $\angle A+\angle A_1=180°$, то

$$\begin{cases}a^2>b^2+c^2\\a_1^2<b_1^2+c_1^2\end{cases}\qquad\begin{cases}a^2<b^2+c^2\\a_1^2>b_1^2+c_1^2\end{cases}$$

Поэтому, первому случаю соответствует знак $"+"$ в правой части равенства (5), а второму – знак $"-"$.

РАЗДЕЛ 2 ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ

2.1. Теорема Стюарта

(см. Приложение 2)

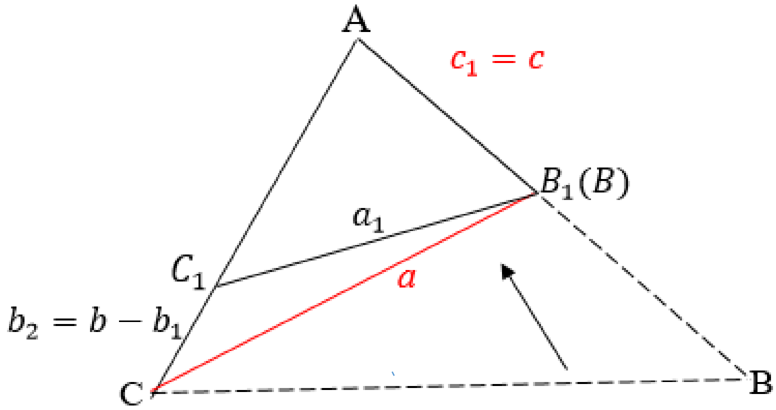


Рис. 2

Положим в формуле (3) $c_1 = c$, при этом точка В перейдет в точку B_1, отрезок СВ – в отрезок CB_1 (Рисунок 2).

$$a_1^2bc - a^2b_1c = (cb_1 - cb)(bb_1 - c^2),$$

$$a_1^2b - a^2b_1 = -(b - b_1)(bb_1 - c^2)$$

Обозначим $b - b_1 = b_2$, тогда

$$a_1^2b = c^2b_2 + a^2b_1 - bb_1b_2 - \text{теорема Стюарта} \quad (6)$$

Таким образом формула (6) является частным случаем соотношений (2) или (3).

2.1. Вычисление диагоналей вписанного четырехугольника [5]

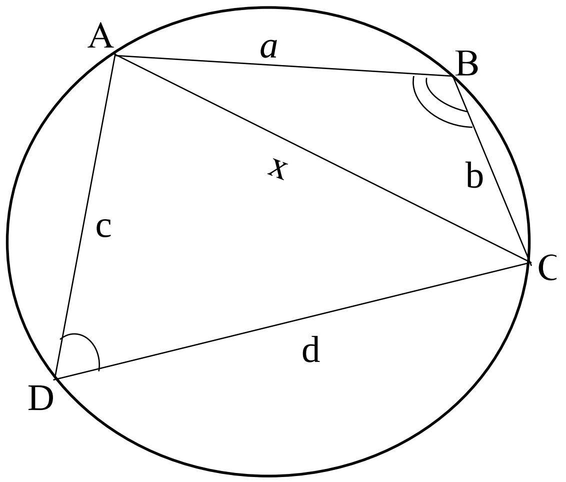


Рис. 3

Так как $\angle B + \angle D = 180°$ (Рисунок 3), то для ΔABC и ΔADC имеет место равенство (5) со знаком " $-$ " перед правой частью. Следовательно,

$$\frac{x^2 - a^2 - b^2}{ab} = \frac{c^2 + d^2 - x^2}{cd}$$

Отсюда

$$x^2 = \frac{(c^2 + d^2)ab + (a^2 + b^2)cd}{cd + ab}.$$

Аналогично можно найти вторую диагональ.

2.3. Определение расстояний между замечательными точками треугольника [7], [8]

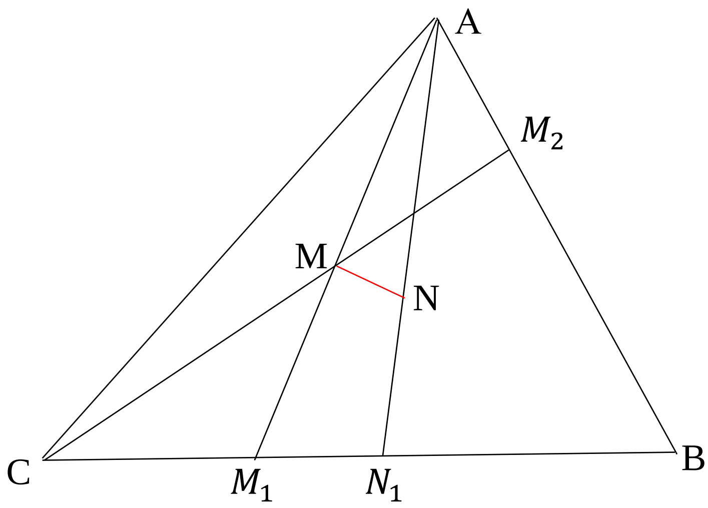


Рис. 4

Пусть M и N – две какие-нибудь замечательные точки ΔABC (Рисунок 4). Проведем секущие AM_1 и AN_1, проходящие через эти точки.

Пусть

$$AM_1 = m, \qquad AN_1 = n, \qquad M_1N_1 = k,$$

$$\frac{AM}{AM_1} = \alpha, \qquad \frac{AN}{AN_1} = \beta, \qquad MN = d.$$

Рассмотрим ΔM_1AN_1. Для облегчения составим таблицу соответствия наших обозначений с обозначениями в формуле (2)

$$AM = b_1 = \alpha m; \qquad AM_1 = b = m;$$

$$AN = c_1 = \beta n; \qquad AN_1 = c = n;$$

$$MN = a_1 = d; \qquad M_1N_1 = a = k.$$

Подставим в формулу (2):

$$\frac{\alpha^2 m^2 + \beta^2 n^2 - d^2}{\alpha m \times \beta n} = \frac{m^2 + n^2 - k^2}{mn},$$

Сокращая на mn в знаменателях,

$$\alpha^2 m^2 + \beta^2 n^2 - d = \alpha\beta(m^2 + n^2 - k^2),$$

$$d = \alpha^2 m^2 + \beta^2 n^2 - \alpha\beta(m^2 + n^2 - k^2) \quad (7)$$

Покажем, как могут быть найдены все величины, входящие в правую часть формулы (7).

Пусть для определенности M – точка Лемуана (см. Приложение 3), а N – центр тяжести ΔABC.

1)Величины m и n легко вычислить по теореме Стюарта, так как известно, в каком отношении секущие, проходящие через замечательные точки треугольника, делят его стороны.

Так, если M (Таблица 1) [6]:

Таблица 1

центр вписанной в треугольник окружности	$\frac{M_1C}{M_1B} = \frac{b}{c}$
центр описанной около треугольника окружности	$\frac{M_1C}{M_1B} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$
центр тяжести	$\frac{M_1C}{M_1B} = 1$
ортоцентр	$\frac{M_1C}{M_1B} = \frac{tg\ B}{tg\ C}$
точка Лемуана	$\frac{M_1C}{M_1B} = \frac{b^2}{c^2}$
точка Жергонна (см. Приложение 4)	$\frac{M_1C}{M_1B} = \frac{p-c}{p-b}$, где p – полупериметр
одна из точек Брокара (см. Приложение 5)	$\begin{cases} \frac{M_1C}{M_1B} = \frac{a^2}{c^2}, \\ \frac{M_1C}{M_1B} = \frac{b^2}{a^2}. \end{cases}$

Из ΔABC

$$a \times m^2 = b^2 \times BM_1 + c^2 \times CM_1 - a \times CM_1 \times BM_1,$$

$$m^2 = \frac{b^2}{a} \times BM_1 + \frac{c^2}{a} \times CM_1 - CM_1 \times BM_1 \quad (8)$$

$$\begin{cases} a = M_1C + M_1B, \\ \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{M_1C}{M_1B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1B = a - M_1C, \\ M_1B = \dfrac{c^2 \times M_1C}{b^2} \end{cases}$$

$$a - M_1C = \frac{c^2 \times M_1C}{b^2}, \qquad M_1C = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}.$$

$$M_1B = a - \frac{ab^2}{b^2 + c^2} = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}.$$

Подставляя в (8), найдем m:

$$m = \frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \tag{9}$$

Аналогично можно найти n. Правда, в нашем случае можно использовать готовую формулу для длины медианы

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \tag{10}$$

Нахождение k не представляет трудностей

$$\begin{cases} \dfrac{CN_1}{BN_1} = 1, \\ CN_1 + BN_1 = a. \end{cases}$$

$$CN_1 = BN_1 = \frac{a}{2},$$

$$k = M_1N_1 = \mathrm{C}N_1 - CM_1 = \frac{a}{2} - \frac{ab^2}{b^2+c^2} = \frac{a(c^2-b^2)}{2(b^2+c^2)}. \tag{11}$$

Определяем значения α и β.

Поскольку N – точка пересечения медиан ΔABC, то

$$\beta = \frac{AN}{AN_1} = \frac{2}{3}. \tag{12}$$

Для нахождения α проведем через точку M вторую симедиану CM_2 и определяем AM_2 и BM_2.

$$\begin{cases} \dfrac{BM_2}{AM_2} = \dfrac{a^2}{b^2}, \\ BM_2 + AM_2 = c. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BM_2 \times b^2 = AM_2 \times a^2, \\ BM_2 = c - AM_2. \end{cases}$$

$$(c - AM_2)b^2 = AM_2 \times a^2,$$

$$AM_2 = \frac{cb^2}{a^2 + b^2},$$

$$BM_2 = c - \frac{cb^2}{a^2 + b^2} = \frac{ca^2}{a^2 + b^2}.$$

Применим теорему Менелая [4] (см. Приложение 6) к $\Delta M_1 AB$ с секущей CM_2:

$$\frac{AM}{M_1 M} \times \frac{M_1 C}{BC} \times \frac{BM_2}{AM_2} = 1.$$

Подставим имеющиеся значения:

$$\frac{AM}{m - AM} \times \frac{\frac{ab^2}{b^2 + c^2}}{a} \times \frac{\frac{ca^2}{a^2 + b^2}}{\frac{cb^2}{a^2 + b^2}} = 1,$$

$$\frac{AM}{m - AM} = \frac{b^2 + c^2}{a^2},$$

$$a^2 AM = b^2 m - b^2 \times AM + c^2 m - c^2 \times AM,$$

$$AM(a^2 + b^2 + c^2) = m(b^2 + c^2),$$

$$AM = \frac{m(b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Определяем α:

$$\alpha = \frac{AM}{AM_1} = \frac{m\left(b^2 + c^2\right)}{a^2 + b^2 + c^2} \div m = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (13)$$

Таким образом, для определения расстояний между замечательными точками треугольника придется только произвести подстановки и вычисления, правда подчас довольно громоздкие.

ВЫВОД

Цель, поставленная в работе, достигнута.

В ходе проделанной работы было получено обобщение теоремы Стюарта. Доказанная нами формула позволяет решать ряд сложных задач планиметрии. В частности, она позволяет алгоритмизировать нахождение расстояния между двумя замечательными точками в треугольнике. Для решения подобных задач предложен общий подход, что значительно облегчает их решение.

Рассмотрено применение общей формулы в частных случаях.

Список литературы

1. Алгебра, 9 кл. / Под ред. С.А. Теляковского. М., Просвещение, 2016
2. Геометрия, 7-9кл. / Л.С. Атанасян и др. М., Просвещение, 2016
3. Коксетер Г.С., Грейтцер С.П. Новые встречи с геометрией. М. Наука, 1978
4. Понарин Я.П. Элементарная геометрия, т.1 Планиметрия, преобразования, плоскости. М., МЦНМО, 2004
5. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, ч.1. М. Наука, 1986
6. Редемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления. М., Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962
7. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. М., ООО «Издательство Астрель», 2001
8. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. М., Наука, 1967

Приложения

1. Теорема о квадрате стороны треугольника

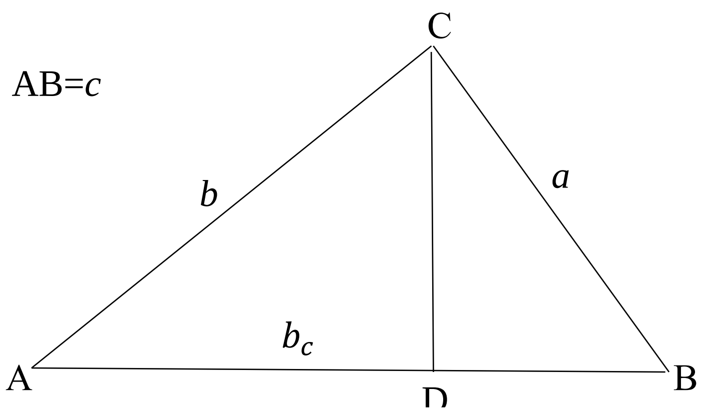


Рисунок 1

Доказать (Рисунок 1):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb_c$$

Доказательство

ΔCDB:

$$a^2 = CD^2 + BD^2$$

ΔACD:

$$CD^2 = b^2 - b_c^2$$

$$BD = c - b_c$$

$$a^2 = b^2 - b_c^2 + (c - b_c)^2 = b^2 - b_c^2 + c^2 - 2cb_c + b_c^2 = b^2 + c^2 - 2cb_c$$

Квадрат стороны (a) треугольника, лежащей против острого угла (A), равен сумме квадратов двух других сторон (b и c) без удвоенного произведения одной из них (c) на проекцию (b_c) на нее другой стороны (b).

2. Теорема Стюарта

Произведение квадрата расстояния от точки, лежащей на стороне треугольника, до противоположной вершины на длину этой стороны равно сумме произведения квадратов оставшихся сторон на несмежные с ними отрезки первой стороны без произведения этих отрезков на длину основания.

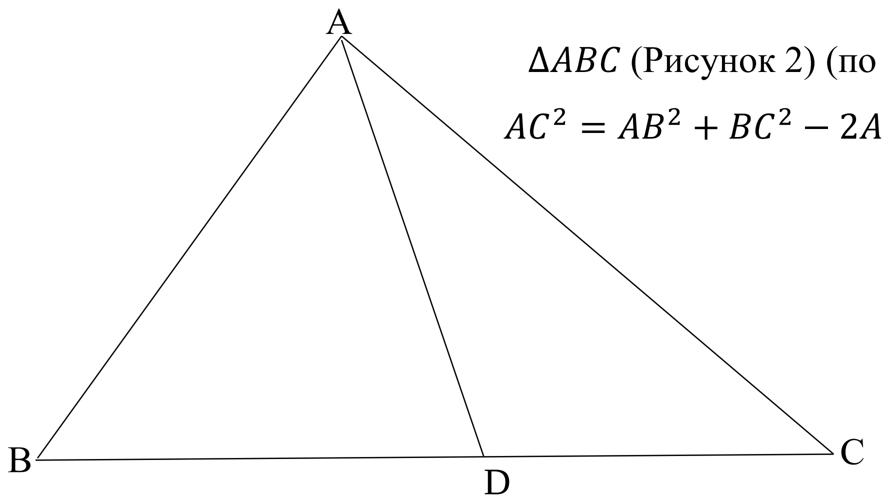


Рисунок 2

ΔABC (Рисунок 2) (по теореме косинусов):

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times cos\angle B$$

Выразим:

$$cos\angle B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\times BC}. \quad (1)$$

ΔABD (по теореме косинусов):

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \times cos\angle B$$

$$cos\angle B = \frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\times BD}. \quad (2)$$

Левые части (1) и (2) равны, значит

$$\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC} = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \times BD}$$

$$AB^2 \times BD + BC^2 \times BD - AC^2 \times BD = AB^2 \times BC + BD^2 \times BC - AD^2 \times BC -$$

$$-AB^2(BC - BD) + BC \times BD(BC - BD) = AC^2 \times BD - AD^2 \times BC$$

т. к. $BC - BD = DC$, то

$$-AB^2 \times DC + BC \times BD \times DC = AC^2 \times BD - AD^2 \times BC$$

$$AD^2 \times BC = AB^2 \times DC + AC^2 \times BD - BC \times BD \times DC$$

3. Точка Лемуана

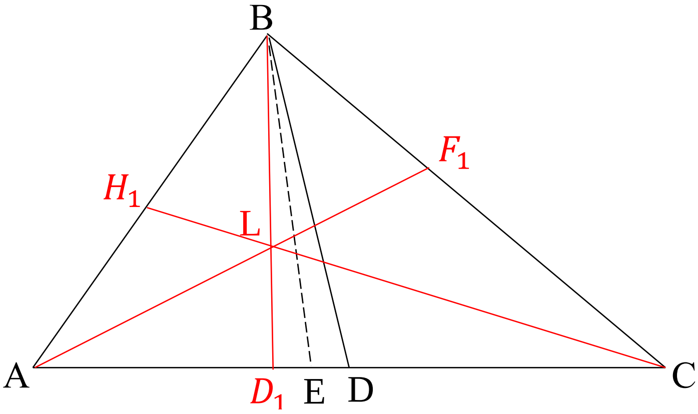


Рисунок 3

Прямые, симметричные с медианами треугольника относительно его внутренних биссектрис, называются симедианами (Рисунок 3).

$BD_1 -$ симедиана

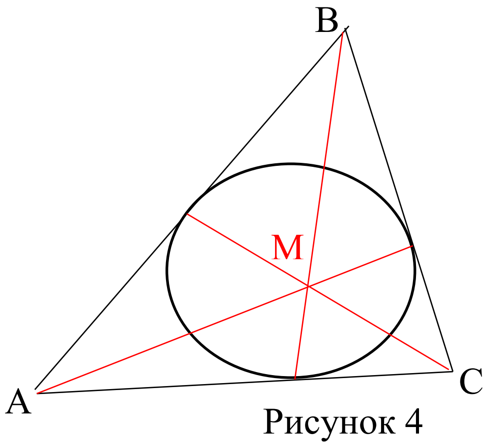
BD – медиана

BE – биссектриса $\angle ABC$

Говорят, что симедианы изогонально сопряжены с медианами треугольника.

Точка пересечения симедиан называется точкой Лемуана.

4. Точка Жергонна



М – точка Жергонна

Рисунок 4

Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанного или вневписанного кругов пересекаются в одной точке – точке Жергонна (Рисунок 4).

5. Точки Брокара

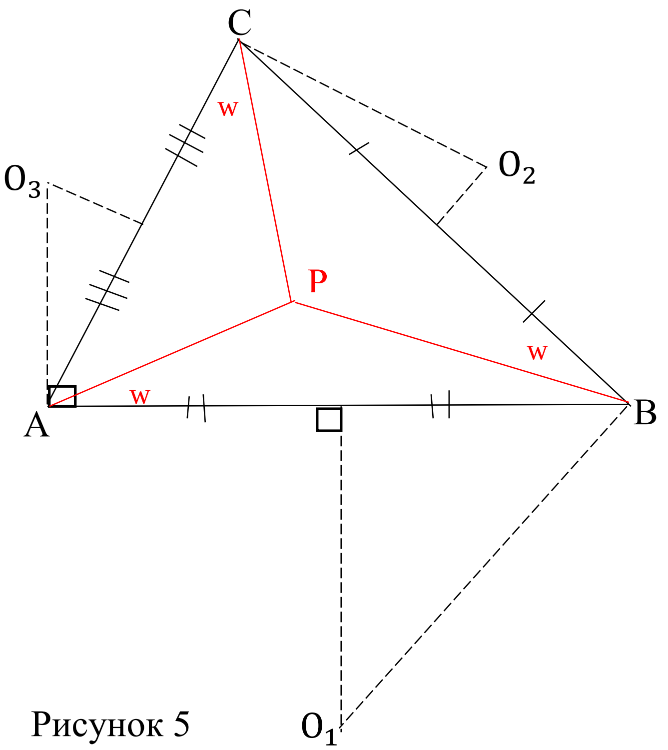


Рисунок 5

O_1, O_2, O_3 – центры окружностей, которые пересекаются в точке P – <u>первой точке Брокара</u> (Рисунок 5). Точка P с вершинами треугольника образует угол w – <u>угол Брокара</u>.

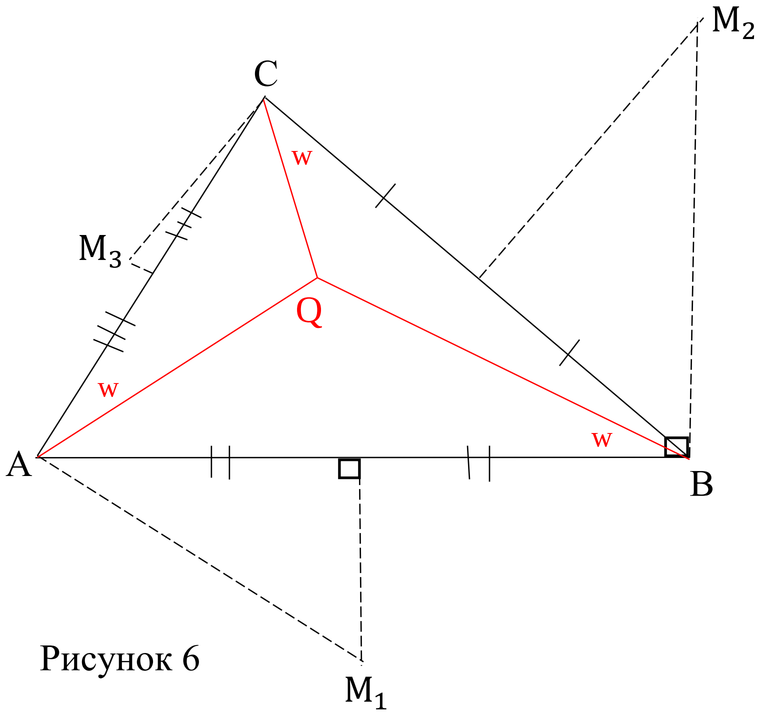


Рисунок 6

M_1, M_2, M_3 – центры окружностей, которые пересекаются в точке Q – второй точке Брокара (Рисунок 6). Точка Q с вершинами треугольника образует угол w – угол Брокара.

6. Теорема Менелая

Если точки A', B' и C' лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ΔABC (Рисунок 7) или на их продолжениях, то они коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC'}{BC'} \times \frac{BA'}{CA'} \times \frac{CB'}{AB'} = 1.$$

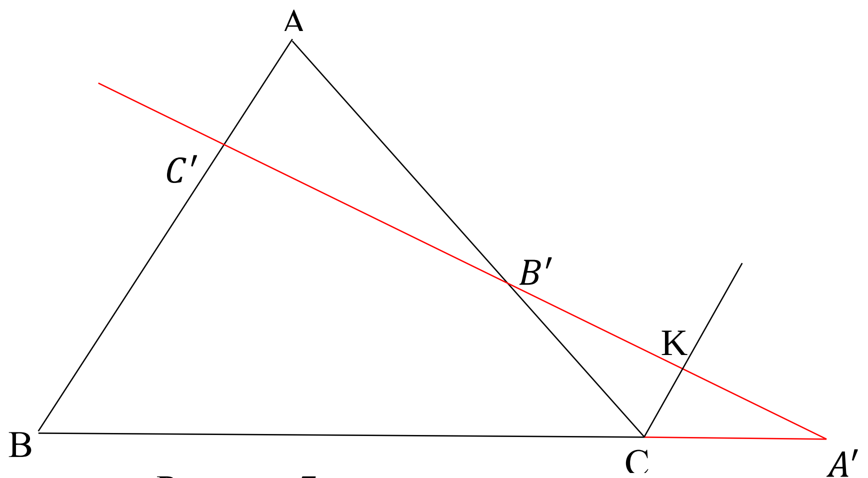


Рисунок 7

Проведём через точку С прямую СК параллельно АВ (К – точка пересечения с C_1B_1)

$$\Delta CKB' \sim \Delta AC'B'$$

$$\frac{CK}{AC'} = \frac{CB'}{AB'}, CK = \frac{AC' \times CB'}{AB'}$$

$$\Delta A'CK \sim \Delta A'BC'$$

$$\frac{CK}{C'B} = \frac{A'C}{BA'}, CK = \frac{C'B \times A'C}{BA'}$$

$$\frac{AC' \times CB'}{AB'} = \frac{C'B \times A'C}{BA'}$$

$$\frac{AC'}{BC'} \times \frac{BA'}{CA'} \times \frac{CB'}{AB'} = 1$$