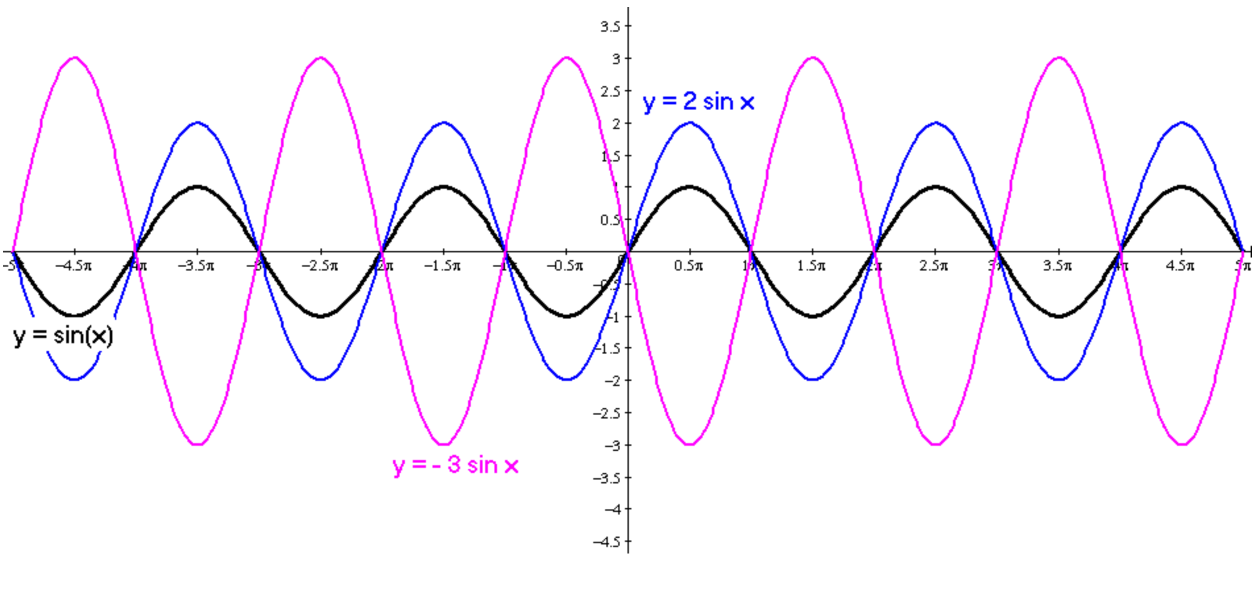
МОУ « ЛИЦЕЙ «ИНТЕЛЛЕКТ» г. ДОНЕЦКА»

КОНСПЕКТ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКА ПО ТЕМЕ « РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ»

Составитель **МИГИНСКАЯ ЛЮДМИЛА МИХАЙЛОВНА**,

учитель математики, старший учитель.



2018 год

Содержание

Предисловие

Это пособие не является обычным сборником уравнений. Конспект выпускника-абитуриента по решению уравнений предполагает отработку способов решения, однако, глубина проработки этой темы проходит на более высоком уровне математической подготовки, чем тот, которого выпускники достигают по окончании школы.

Сборник включает в себя три раздела:

1. Показательные уравнения.
2. Логарифмические уравнения.
3. Тригонометрические уравнения.

В начале каждого раздела приводится справочный материал. Затем, предлагаются образцы решений уравнений и тренировочные упражнения, позволяющие прочно усвоить и хорошо отработать все предложенные способы решения уравнений.

Среди уравнений имеются как традиционные, так и нестандартные подходы к решению уравнений, что способствует расширению кругозора учащихся.

Цель пособия — содействовать развитию творческой одаренности учащихся и подготовке их к внешнему оцениванию.

Литература

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами. Справочное пособие по математике. МН: «Асар», 1996.
2. Васильева В.А., Кудрина Т.А. Пособие для поступающих в вузы. М:. МАИ, 1992.
3. Егерев В.К., Зайцев В.В. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. К: Канон, 1997.
4. Ковтонюк М.М., Ясинский В.А.. Бак С.М. Алгебра и начала анализа. (10-11 кл.). Учебно-методическое пособие.Х.: Изд. гр. «Основа», 2006.
5. Литвиненко Т.Н., Федченко Л.Я. Алгебра. Сборник заданий для экзамена по математике на аттестат о среднем образовании. (10-11 кл.), 1996.
6. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б. Алгебраический тренажер.К: А.С.К., 1997.
7. Письменный Т.Д. Готовимся к экзамену по математике. М: Айрис-пресс, 2003.
8. Потапов М.К., Олехник С.Н. Конкурсные задачи по математике. М: АО «Столетие», 1995.

Раздел 1. Показательные уравнения

Справочный материал

Уравнения вида $a^x = b$, где $a>0$, $a \neq 1$. называются показательными.
Функция a^x монотонно возрастает, если $a>1$ и монотонно убывает, если $0<a<1$.
Уравнение вида $a^x = x$ не является показательным и алгебраически не может быть решено. Как правило, уравнения такого типа решаются графически.

Показательное уравнение $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ ($a>0$, $a \neq 1$, $b>0$, $b \neq 1$) равносильно уравнению $f(x)\log_c a = g(x)\log_c b$, полученное логарифмированием данного уравнения.

Уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Корнями уравнения $(u(x))^{f(x)} = (u(x))^{g(x)}$ считаются только решения смешанной системы:

$$\begin{cases} u(x)>0 \\ u(x) \neq 1 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$$

и те значения x, для которых $u(x)=1$, если при этих значениях определены $f(x)$ и $g(x)$.

Решим уравнение

$$\sqrt[x]{5^{5\sqrt{x}}} = 5^{\sqrt{x}-4}$$

Решение.

О.Д.З. $x>0; x \neq 0$

$\left(5^{5\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = 5^{\sqrt{x}-4}$;

$5^{\frac{5\sqrt{x}}{x}} = 5^{\sqrt{x}-4}$;

$\frac{5\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x} - 4$;

$\frac{5}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 4$;

$(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} - 5 = 0$;

Пусть $\sqrt{x} = y > 0$, получим уравнение

$y^2 - 4y - 5 = 0$;

$y_1 = 5$,

$y_2 = -1 \notin$ О.Д.З., вернемся к подстановке $\sqrt{x} = 5$, $x=25$.

Ответ: 25.

Тренировочные упражнения

а) $\frac{16}{25} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$;. Ответ: $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

б) $\frac{1}{27}\sqrt[4]{9^{3x-1}} = 27^{-\frac{2}{3}}$. Ответ: 1

Решим уравнение.

$5^{2x-1}+5^{x+1}=250;$

Решение

$\frac{1}{5}\cdot 5^{2x}+5\cdot 5^{x}=250;$

Пусть 5^{x}=y>0, получим

$\frac{1}{5}y^{2}+5y=250;$

$y^{2}+25y-1250=0;$

$y_1=25,$

$y_2=-50\notin$ О.Д.З., вернемся к подстановке $5^{x}=25$, $5^{x}=5^{2}$, x=2.

Ответ: 2

Тренировочные упражнения

а) $3^{x-1}+16\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}=26;$ Ответ: $\log_3 6$; $\log_3 72$

б) $2^{x+1}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{64}\cdot 2^{x-1};$ Ответ: $-\frac{17}{2}$

Решим уравнение.

$\sqrt{27^{x-1}}=\sqrt[3]{9^{2-x}}$;

Решение

$\sqrt{3^{3(x-1)}}=\sqrt[3]{3^{2(2-x)}}$;

$3^{\frac{3(x-1)}{2}}=3^{\frac{2(2-x)}{3}}$;

$\frac{3(x-1)}{2}=\frac{2(2-x)}{3};$

$9(x-1)=4(2-x)$;

$9x-9=8-4x;$

$13x=17$

$x=\frac{17}{13}$

Ответ: $\frac{17}{13}$.

Тренировочные упражнения

а) $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5(\sqrt{2})^{x-2}+\sqrt{x^2-4}$; Ответ: $\frac{5}{2}$

б) $3^{x^2-\frac{5}{7}x}=\sqrt[7]{9};$ Ответ: $-\frac{2}{7};1$

Решим уравнение.

$5\cdot 3^{2x}+15\cdot 5^{2x-1}=8\cdot 15x;$

Решение

$5\cdot 3^{2x}+\dfrac{3\cdot 5\cdot 5^{2x}}{5}=8\cdot(3\cdot 5)^{x};$

$5\cdot 3^{2x}+3\cdot 5^{2x}-8\cdot 3^{x}\cdot 5^{x}=0;$

разделим на $3^{2x}\neq 0$, получим

$5+3\dfrac{5^{2x}}{3^{2x}}-8\dfrac{5^{x}}{3^{x}}=0;$

пусть $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x}=y>0$,получим

$5+3y^{2}-8y=0;$

$y_1=\dfrac{5}{3}; y_2=1$, вернемся к подстановке $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x}=\dfrac{5}{3}; x=1$: $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{x}=1; x=0$;

Ответ: 0; 1.

Тренировочные упражнения

а) $2^{2x+2}-6^{x}-2\cdot 3^{2x+2}=0;$ Ответ: -2

б) $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}};$ Ответ: $\dfrac{\lg 3-\lg 2}{\lg\left(\sqrt{5}-1\right)-\lg 2}$

Решим уравнение.

$\sqrt{4x^{2}-1}(25^{x}-6\cdot 5^{x}+5)=0$

Решение.

О.Д.З. $4x^{2}-1\geq 0; x\in(-\infty;-\dfrac{1}{2}]\cup[\dfrac{1}{2};+\infty);$

$4x^{2}-1=0, x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2};$

$25^{x}-6\cdot 5^{x}+5=0;$

пусть $5^{x}=y>0,$

$y^{2}-6y+5=0;$

$y_1=5, y_2=1,$ вернемся к подстановке, получим

$5^{x}=5, x_3=1;$

$5^{x}=1, x_4=0\notin \hat{I}\ddot{a}\c{c}$

Ответ: $\pm\dfrac{1}{2}$;1.

Решим уравнение.

$7^{2\sin x+\sqrt{3}}=1.$

Решение.

$2\sin x+\sqrt{3}=0;$

$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2};\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in z;$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in z$

.

Тренировочное упражнение

$2^{x^2}-5x+6=1.$ Ответ: 2; 3.

Решим уравнение.

$\sqrt{2^{x^2-2x-10}}=\sqrt{33+\sqrt{128}}-1;$

Решение:

Преобразуем правую часть уравнения:

$\sqrt{33+\sqrt{128}}-1=\sqrt{33+2\sqrt{32}}-1=\sqrt{32+2\sqrt{32}+1}-1=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{32}+1\right)^2}-1=\sqrt{32}+1-1=\sqrt{32}=2^{\frac{5}{2}},$

вернемся к уравнению, получим

$2^{\frac{x^2-2x-10}{2}}=2^{\frac{5}{2}};$

$x^2-2x-10=5;x^2-2x-15=0;$

$x_1=-3,x_2=5;$

Ответ: -3; 5.

Тренировочное упражнение

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2-6x-4}=(\sqrt{3+\sqrt{8}-1})^x.$

Ответ: -0.5; 8.

Решим уравнение

$3^{2x-1}=5^{3-x};$

Решение

$(2x-1)\lg 3=(3-x)\lg 5;$

$2x\lg 3+x\lg 5=3\lg 5+\lg 3;$

$x(2\lg 3+\lg 5)=3\lg 5+\lg 3;$

$x=\dfrac{3\lg 5+\lg 3}{2\lg 3+\lg 5};$

Ответ: $\dfrac{3\lg 5+\lg 3}{2\lg 3+\lg 5}$.

Тренировочное упражнение

$5^{2x-3}=19^{x-1}$

Ответ: $\dfrac{\lg 19+3\lg 5}{2\lg 5+\lg 19}$.

Решим уравнение

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1}\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{\sqrt[4]{3^{3x-4}}}{2};$

Решение:

$(x-1)(\lg 3-2\lg 2)+\dfrac{1}{2}(2\lg 2-\lg 3)=-\lg 2+\dfrac{3x-4}{4}\lg 3;$

$x(\lg 3-2\lg 2)-\lg 3+2\lg 2+\lg 2-\dfrac{1}{2}\lg 3=-\lg 2+\dfrac{3}{4}x\lg 3-\lg 3;$

$x(\lg 3-2\lg 2-\dfrac{3}{4}\lg 3)=\dfrac{1}{2}\lg 3-4\lg 2;$

$x(\dfrac{1}{4}\lg 3-2\lg 2)=2(\dfrac{1}{4}\lg 3-2\lg 2);$

$x=2$

Ответ: 2.

Тренировочное упражнение

$\sqrt[12]{\left(\dfrac{17}{25}\right)^{9(x+2)}}\cdot\sqrt{36^{2x-1}}=216\sqrt{\left(\dfrac{25}{17}\right)^{-3x}};$

Ответ:2.

Решим уравнение.

$2^{x-2}=3^{x-2}\ |:3^{x-2}\neq 0;$

Решение

$$\frac{2^{x-2}}{3^{x-2}}=1;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}=1;$$

$$x-2=0;$$

$$x=2;$$

Ответ:2.

Тренировочные упражнения

а) $8^{x-3}=9^{x-3};$

Ответ:3.

б) $2^{3x-2}=5^{x-\frac{2}{3}};$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Решим уравнение

$$2^{3\sqrt{x}}+3\cdot 2^{3\sqrt{x}-1}=20;$$

Решение:

$$2^{3\sqrt{x}-1}(2+3)=20;$$

$$2^{3\sqrt{x}-1}=4;$$

$$2^{3\sqrt{x}-1}=2^{2};$$

$$3\sqrt{x}-1=2;$$

$$3\sqrt{x}=3;$$

$$\sqrt{x}=1;$$

$$x=1;$$

Ответ:1.

Тренировочные упражнения

а) $5\cdot 3^{2x-1}-9^{x-0.5}=9^{x}+4\cdot 3^{2x-2}:$

Ответ: нет решений.

б) $3\cdot 4^{x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1};$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Решим уравнение

$$3^{2x-5}+3^{2x-7}+3^{2x-9}=45\frac{1}{2}+22\frac{3}{4}+11\frac{3}{8}+\ldots$$

Решение:

Правая часть представляет бесконечную убывающую геометрическую прогрессию, т.к. $22\frac{3}{4}:45\frac{1}{2}=\frac{91}{4}:\frac{91}{2}=\frac{1}{2}$; $11\frac{3}{8}:22\frac{3}{4}=\frac{91}{8}:\frac{91}{4}=\frac{1}{2}$ и т.д.

$q=\frac{1}{2}$ – знаменатель прогрессии;

$$S=\frac{45\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=91;$$

уравнение принимает вид

$$3^{2x-9}(3^4+3^2+1)=91;$$
$$3^{2x-9}\cdot 91=91;$$
$$3^{2x-9}=1;$$
$$2x=9;\ \ x=4{,}5;$$

Ответ:4,5.

Тренировочные упражнения

а) $1+a+a^2+...+a^{x-1}+a^x=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8);$

Ответ:15.

б) $2^{3x}\cdot 3^x-2^{3(x-1)}\cdot 3^{x-1}=552;$

Ответ:2.

Решим уравнение

$$2^x-2=15\cdot 2^{\frac{x-3}{2}};$$

Решение:

Пусть $2^{\frac{x-3}{2}}=y>0,$ тогда $2^x=8y^2$, получим уравнение

$$8y^2-2=15y;$$
$$8y^2-15y-2=0;$$
$$y_1=-\frac{1}{8}\notin \hat{I}\ .\ddot{A}.\c{C}.$$
$$y_2=2;$$

Вернемся к подстановке

$$2^{\frac{x-3}{2}}=2;$$
$$\frac{x-3}{2}=1; x=5;$$

Ответ: 5

Тренировочные упражнения

а) $5^{2x-1}+5^{x+1}=250;$

Ответ:2.

б) $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3;$

Ответ:2.

в) $2^{3(x-1)}-128\cdot 2^{3(2-x)}=48;$

Ответ:3.

г) $27^{\frac{3}{x}}+2\cdot 3^{\frac{x+3}{x}}-28=0;$

Ответ: 3.

Решим уравнение

$2^{x}+2^{-x}=2\cos 2x;$

Решение:

Умножим обе части уравнения на $2^{x}\neq 0$, получим

$2^{2x}+1=2\cdot 2^{x}\cdot\cos 2x;$

$2^{2x}-2\cos 2x\cdot 2^{x}+1=0;$

Пусть $2^{x}=y>0$, получим

$y^{2}-2y\cos 2x+1=0;$

$D=4\cos^{2}2x-4=4(\cos^{2}2x-1)=-4\sin^{2}2x;$

$D=0\Rightarrow -4\sin^{2}2x=0,\ 2x=\pi n, n\in Z;$

$x=\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z;$

$\cos 2x=\cos\dfrac{\pi n}{2}\cdot 2=\cos\pi n=\pm 1, n\in Z;$

Тогда получаем два уравнения:

$\begin{cases} y^{2}-2y+1=0; \\ \cos\pi n=1, n\in Z; \end{cases}$ и $\begin{cases} y^{2}+2y+1=0; \\ \cos\pi n=-1; \end{cases}$

$y=1$ $\quad$ $y=-1\notin \hat{I}\ .\ddot{A}.Ç.$

Вернемся к подстановке

$2^{x}=1, x=0,$ т.к. тригонометрические уравнения имеют период 2π ,то все решения уравнения будут равны $x=0+2\pi k, k\in Z.$ Ответ: к, кэz

Решим уравнение.

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}=4;$$

Решение.

Т.к. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 1,$ тогда $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}$;

пусть $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = y > 0$;

получим:

$y^2 - 4y + 1 = 0;$

$y_1 = 2+\sqrt{3}, y_2 = 2-\sqrt{3};$

вернемся к подстановке $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3};$

$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3};$ и $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1};$

$x_1 = 2;$ $x_1 = -2;$

Ответ: 2; -2

Тренировочные упражнения

а) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10;$

Ответ: ± 2.

б) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = \left(2\sqrt{2}\right)^x;$

Ответ: 2.

Решим уравнение

$10^{(x+1)(3x+4)} - 3\cdot 10^{(x+1)(x+2)} = 10^{1-x^2-x};$

Решение:

$10^{3x^2+4x+3x+4} - 3\cdot 10^{x^2+2x+x+2} = 10^{1-x^2-x};$

$10^{3x^2+7x+4} - 3\cdot 10^{x^2+3x+2} = 10^{1-x^2-x} \,|: 10^{-x^2-x} \neq 0;$

$10^{4x^2+8x+4} - 3\cdot 10^{2x^2+4x+2} = 10;$

Пусть $10^{2x^2+4x+2} = y > 0$; получим

$y^2 - 3y - 10 = 0;$

$y_1 = 5,\ y_2 = -2 \notin$ Î .Ä.Ç.

Вернемся к подстановке

$10^{2x^2+4x+2} = 5;$

$2x^2 + 4x + 2 = \lg 5;$

$2x^2 + 4x + 2 - \lg 5 = 0;$

$D = 16 - 8(2-\lg 5) = 16 - 4(4 - 2\lg 5);$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{\lg 25}}{2}$$

Ответ: $\dfrac{-2 \pm \sqrt{\lg 25}}{2}$.

Тренировочные упражнения

а) $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$;

Ответ: $\pm\frac{1}{2}$.

б) $27^x+12^x=2\cdot 8^x$;

Ответ: 0.

Решим уравнение

$x^{x+1}=x^{x^2-1}$;

Решение:

Это уравнение показательно-степенное, поэтому рассмотрим случаи:

1) $x+1=x^2-1$;

$x_1=2; x_2=-1$;

Проверим: $x=2$; $2^3=2^3$-верно; $x=-1$; $(-1)^0=(-1)^0$-верно;

2) $x=1$;

Проверим: $1^{1+1}=1^{1-1}$ - верно;

3) $x=0$;

Проверим: $0^{0+1}=0^{0-1}$-не имеет смысла

Ответ:-1;1;2.

Тренировочные упражнения

а) $(x-2)^{x^2-x}=(x-2)^{12}$;

Ответ:-3;1;3;4.

б) $(x-3)^{x^2-3x}=(x-3)^{8x-3}$;

Ответ: 2;4;5;6.

Решим уравнение

$\left(\sqrt[3]{0{,}5}+\sqrt[3]{4}\right)^x=13{,}5$;

Решение:

$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\sqrt[3]{4}\right)^x=\frac{27}{2}$;

$\left(\frac{1+2}{\sqrt[3]{2}}\right)^x=\frac{27}{2}$;

$$\left(\sqrt[3]{\frac{3^3}{2}}\right)^x = \sqrt[3]{\frac{27}{2}};$$

$$\left(\frac{27}{2}\right)^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{27}{2}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{3}; x = 1;$$

Ответ: $x = 1$.

Тренировочное упражнение

$$\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7};$$

Ответ: 2.

Решим уравнение

$$2^x\left(2^x + 1\right) + 2^{-x}\left(2^{-x} - 1\right) = 8;$$

Решение:

Пусть $2^x = z > 0$, получим:

$$z^2 + \frac{1}{z^2} + z - \frac{1}{z} = 8;$$

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} - 2;$$

Пусть $z - \dfrac{1}{z} = t$, получим

$$t^2 + t - 6 = 0;$$

$$t_1 = -3;\ t_2 = 2;$$

Вернемся к подстановкам $z - \dfrac{1}{z} = t,\ 2^x = z$;

$$2^x - \frac{1}{2^x} = 2^x - 2^{-x};$$

$$2^x - 2^{-x} = -3; \qquad \text{и} \qquad 2^x - 2^{-x} = 2;$$

$$2^x = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}; \qquad\qquad 2^x = 1 + \sqrt{2}.$$

Ответ: $\log_2 \dfrac{\sqrt{13} - 3}{2};\ \log_2\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

Тренировочное упражнение

$$2 \cdot 2^{2x} + 18 \cdot 2^{-2x} - 11 \cdot 2^x - 33 \cdot 2^{-x} + 26 = 0;$$

Ответ: $1; \log_2 1{,}5$.

Решим уравнение

$$\left|x-2\right|^{x^2-2x}=\left|x-2\right|^{5x-10};$$

Решение:

Прологарифмируем это уравнение по основанию 10, получим:

$$\lg\left|x-2\right|^{x^2-2x}=\lg\left|x-2\right|^{5x-10};$$

$$\left(x^2-2x\right)\cdot\lg\left|x-2\right|=\left(5x-10\right)\cdot\lg\left|x-2\right|;$$

$$\lg\left|x-2\right|\cdot\left(x^2-7x+10\right)=0;$$

$$\begin{matrix}\lg\left|x-2\right|=0; \\ \left|x-2\right|=1;\end{matrix}; \quad \text{и} \quad \begin{matrix}x^2-7x+1=0; \\ x_1=5; x_2=2;\end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix}x-2=1 \\ x-2=-1\end{matrix}\right.; \quad \left[\begin{matrix}x_3=3 \\ x_4=1.\end{matrix}\right.;$$

Проверим корни

$x_4=1;$

$\left|1-2\right|^{1-2}=\left|1-2\right|^{5-10};$

$\left|-1\right|^{-1}=\left|-1\right|^{-5}$ – верно;

$x_3=3;$

$\left|3-2\right|^{9-6}=\left|3-2\right|^{15-10;}$

$1^3=1^3$ – верно;

$x_2=2;$

$\left|2-2\right|^{4-4}=\left|2-2\right|^{10-10};$

$0^0=0^0$ – не имеет смысла;

$x_1=5;$

$\left|5-3\right|^{25-10}=\left|5-3\right|^{25-10}$ – верно;

Ответ:1;3;5.

Тренировочные упражнения

а) $2^{\left|x+2\right|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1;$

Ответ:-3.

б) $\sqrt[4]{\left|x-3\right|^{x+1}}=\sqrt[3]{\left|x-3\right|^{x-2}};$

Ответ: 2;4;11.

Решим уравнение

$$5^{1+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}-24\cdot5^{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}-5=0;$$

Решение:

$5^{1+2\sin x}-24\cdot 5^{\sin x}-5=0;$

$5\cdot 5^{2\sin x}-24\cdot 5^{\sin x}-5=0;$

Пусть $5^{\sin x}=y>0$, получим

$5\cdot y^2-24y-5=0;$

$D=676;$

$y_1=5; y_2=-\frac{1}{5}\notin$ Î .Ä.Ç

Вернемся к подстановке

$5^{\sin x}=5;$

$\sin x=1;$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

Тренировочные упражнения

а) $4^{3-4\sin^2\frac{x}{2}}+15\cdot 4^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}-4=0;$

Ответ: $\pi+2\pi n, n\in Z.$

б) $2^{x+\sqrt{x^2-4}}-5\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-2+\sqrt{x^2-4}}-6=0;$

Ответ: $\frac{10}{3}$.

Решим уравнение

$$\frac{1}{25^x+36\cdot 25^{-x}-12}-\frac{\left(1+5\sqrt{5}\right)\cdot 5^{x-1}}{6-25^x}+\frac{1}{\sqrt{5}}=0;$$

Решение:

$$\frac{25^x}{25^{2x}+36-12\cdot 25^x}-\frac{\left(1+5\sqrt{5}\right)\cdot 5^x}{5\cdot\left(6-25^x\right)}+\frac{\sqrt{5}}{5}=0;$$

$$\frac{25^x}{\left(25^x-6\right)^2}+\frac{\left(1+5\sqrt{5}\right)\cdot 5^x}{5\left(6-25^x\right)}+\frac{\sqrt{5}}{5}=0;$$

$$\frac{5^{2x}}{\left(25^x-6\right)^2}+\frac{\left(1+5\sqrt{5}\right)\cdot 5^x}{5\left(25^x-6\right)}+\frac{\sqrt{5}}{5}=0;$$

Пусть $\frac{5^x}{25^x-6}=y$, получим уравнение

$$y^2+\frac{\left(1+5\sqrt{5}\right)y}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=0;$$

$$5y^2+\left(1+5\sqrt{5}\right)y+\sqrt{5}=0;$$

$$D=\left(1+5\sqrt{5}\right)^2-20\sqrt{5}=126-10\sqrt{5}=\left(1-5\sqrt{5}\right)^2;$$

$$y_1=-\sqrt{5};\quad y_2=-\frac{1}{5};$$

Вернемся к подстановке:

1) $$\frac{5^x}{25^{x-6}}=-\sqrt{5};$$

Пусть $5^x=a>0$, тогда $\dfrac{a}{a^2-6}=-\sqrt{5};$

$$a+a^2\sqrt{5}-6\sqrt{5}=0;$$

$$a^2\sqrt{5}+a-6\sqrt{5}=0;$$

$$D=1-4\cdot\sqrt{5}\cdot\left(-6\sqrt{5}\right)=121;$$

$$a_1=\sqrt{5};$$

$$a_2=-\frac{6}{\sqrt{5}}\notin \text{Î .Ä.Ç.}$$

Вернемся к подстановке:

$$5^x=\sqrt{5};\ x=\frac{1}{2};$$

2) $$\frac{5^x}{25^{x-6}}=-\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$5^x\cdot5=6-25^x;$$

Пусть $5^x=a>0$, $a^2+5a-6=0;$

$$a_1=1;\quad a_2=-6\notin \text{Î .Ä.Ç.};$$

$$5^x=1;\quad x=0;$$

Ответ: $0;\frac{1}{2}.$

Тренировочное упражнение

$$\frac{1}{9^x+16\cdot9^{-x}-8}-\frac{\left(1+3\sqrt{3}\right)\cdot3^{x-1}}{4-9^x}+\frac{1}{\sqrt{3}}=0;$$

Ответ: $0;\frac{1}{2}.$

Дополнительные задания для самостоятельного решения.

1) $$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}}\right)=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}}+1+6\sqrt{x}-18;$$

Ответ: 2;9.

2) $3\cdot 64^{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-392\cdot 8^{\sin 2x}+16=0;$

Ответ: $(-1)^k\cdot\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$.

3) $3^x\cdot 5^{x-2}=0{,}04\cdot 15^{8-3x};$

Ответ: 2.

4) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt[x]{\frac{4}{3}}=\frac{9}{16};$

Ответ: $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

5) $\left(36^{5x*tgx}\right)^x\cdot 6^{\pi^2*tgx}=6^{7\pi x*tgx};$

Ответ: $\frac{\pi}{5};\pi k, k\in Z$.

6) $4^{0{,}5x^3-5{,}5x-12{,}875}=\sqrt[4]{2};$

Ответ:-2;13.

7) $\sqrt[x]{\sqrt{2^{3x+1}}}-\sqrt[3x-7]{8^{x-3}}=0;$

Ответ: $\pm\frac{1}{3}\sqrt{21}$.

8) $27=\frac{3^{2x}}{3^{x+1}}\cdot\frac{9^{x-1}}{3^{2x}};$

Ответ:6.

9) $6^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8};$

Ответ:4.

10) $\sqrt[12]{\left(\frac{17}{25}\right)^{9(x+2)}}\cdot\sqrt{36^{2x-1}}=216\sqrt{\left(\frac{25}{17}\right)^{-3x}};$

Ответ: 2.

11) $\sqrt{3^{x-56}}-7\sqrt{3^{x-60}}=162;$

Ответ: 68.

12) $2^{2x}\cdot 9^x-2\cdot 6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2}=0;$

Ответ: 1.

13) $3^{x-1}-\frac{15}{3^{x-1}}+3^{x-2}-\frac{23}{3^{x-2}}=0;$

Ответ: $1+0{,}5\log_3 7$

14) $4^x+6^x=9^x;$

Ответ: $\log_{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

15) $2\cdot 25^x-5\cdot 10^x+2\cdot 4^x=0;$

Ответ: $\log_{0{,}4}2;\log_{2{,}5}2$.

16) $6+4\cdot 2^{1-|x|}=|x+4|+|x-4|;$

Ответ: ± 2.

Раздел 2. Логарифмические уравнения

Справочный материал

Из равенства $a^x = b \Rightarrow \log_a b = x, a \neq 1, a > 0, b > 0.$

Основные свойства логарифмов:

$\log_a 1 = 0;$

$\log_a a = 1;$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y;$

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$

$\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x;$

$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b};$

$\log_a x^p = p \log_a x;$

$\log_b a \cdot \log_a b = 1;$

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a};$

$\log_b a = \log_{b^k} a^k;$

$\log_{a^p} x = \dfrac{1}{p} \log_a x;$

$\log_a \sqrt[p]{x} = \dfrac{1}{p} \log_a x;$

Основное логарифмическое тождество

$a^{\log_a b} = b;$

Решим уравнение.

$$\frac{\log_2 (9 - 2^x)}{3 - x} = 1;$$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $x \neq 3; \quad 2^x < 9.$

$\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x.$

$9 - 2^x = 2^{3-x};$

$2^x + \dfrac{8}{2^x} - 9 = 0;$

Пусть $2^x = y > 0;$ получим

$y + \dfrac{8}{y} - 9 = 0;$

$y^2 - 9y + 8 = 0;$

$y_1 = 1; y_2 = 8;$

Вернемся к подстановке $2^x = 1; x = 0; 2^x = 8; x = 3 \notin$ Î .Ä.Ç.;

Ответ:0.

Тренировочное упражнение.

$$\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2\left(x^2 - 25\right) = 0;$$

Ответ: 6.

Решим уравнение

$$\log_{x-1}\left(x^2 - 5x + 10\right) = 0;$$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $x \neq 2; x > 1;$

$(x-1)^2 = x^2 - 5x + 10;$

$3x = 9; x = 3;$

Ответ: 3.

Тренировочные упражнения.

а) $\log_x 256 = 4\left(2 - \sqrt{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \ldots\right);$

Ответ: 2.

б) $\log_6 (2+x)^2(3-x)^2 = 2;$

Ответ:0;1;4.

в) $\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right) = 0;$

Ответ: 2;6.

Решим уравнение.

$$3\log_5 2 + 2 - x = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right);$$

Решение

Î .Ä.Ç.: $3^x - 5^{2-x} > 0;$

$\log_5 2^3 + \log_5 5^2 - \log_5 5^x = \log_5\left(3^x - 5^{2-x}\right);$

$\log_5 \frac{8 \cdot 25}{5^x} = \log\left(3^x - 5^{2-x}\right);$

$\frac{200}{5^x} = 3^x - 5^{2-x};$

$\frac{200}{5^x} = 3^x - \frac{25}{5^x};$

$15^x = 15^2; x = 2;$

Ответ:2.

Тренировочное упражнение

$\lg\left(x^3+8\right)-0{,}5\lg\left(x^2+4x+4\right)=\lg 7;$

Ответ:-1;3.

Решим уравнение.

$\log_x 9x^2 \log_3^2 x = 4;$

Решение:

Î .Ä.Ç: $x>0; x\neq 1;$

$\left(\log_x 9+\log_x x^2\right)\log_3^2 x = 4;$

$\left(2\log_x 3+2\log_x x\right)\log_3^2 x = 4;$

$\left(\dfrac{2}{\log_3 x}+2\right)\left(\log_3 x\right)^2 = 4;$

Пусть $\log_3 x = t \neq 0,$ получим уравнение

$\left(\dfrac{2}{t}+2\right)t^2 = 4;$

$2t^2+2t-4=0;$

$t^2+t-2=0;$

$t_1=-2; t_2=1;$

Вернемся к подстановке

$\log_3 x=-2; x=3^{-2}=\dfrac{1}{9};$

$\log_3 x=1; x=3;$

Ответ: $\dfrac{1}{9}$;3.

Тренировочное упражнение

$\log_x 5\sqrt{5}-1{,}25=\log_x^2 \sqrt{5};$

Ответ: $5; \sqrt[5]{5}$.

Решим уравнение

$$\frac{1-\lg^2 x^2}{\lg x-2\lg^2 x}=\lg x^4+5;$$

Решение

Î .Ä.Ç: $x>0; \lg x-2\lg^2 x\neq 0; 2\lg^2 x-\lg x\neq 0;$

$\lg x(2\lg x-1)\neq 0; \lg x\neq 0; x\neq 1;$

$2\lg x-1\neq 0; \lg x\neq \frac{1}{2}; x\neq \sqrt{10}.$

$$\frac{(1-\lg x^2)(1+\lg x^2)}{(1-2\lg x)\lg x}=\lg x^4+5;$$

$$\frac{(1-2\lg x)(1+2\lg x)}{(1-2\lg x)\lg x}=4\lg x+5;$$

$$1+\lg x^2=4\lg^2 x+5\lg x;$$

$$4\lg^2 x+3\lg x-1=0;$$

$$\lg x=-1; x_1=0{,}1;$$

$$\lg x=\frac{1}{4}; x_2=\sqrt[4]{10};$$

Ответ: $0{,}1; \sqrt[4]{10}.$

Тренировочное упражнение

$$\frac{1+\lg(x-1)}{1-\lg^2(x-1)}+\frac{1}{1-\lg(x-1)}=1;$$

Ответ: 1,1.

Решим уравнение

$$\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5;$$

Решение:

Î .Ä.Ç: $x\neq 1; x>0; 0<x<1; \log_x 5<0;$

$$\log_x(5x)^{\frac{1}{2}}=\log_x^2 5;$$

$$\frac{1}{2}\log_x 5+\frac{1}{2}\log_x x=\log_x^2 5;$$

$$\log_x^2 5-\frac{1}{2}\log_x 5-\frac{1}{2}=0;$$

Пусть $\log_x 5=y$, получим уравнение

$$2y^2-y-1=0; y_1=1; y_2=-\frac{1}{2};$$

Вернемся к подстановке

$\log_x 5=1; x=5\notin$ Î .Ä.Ç

$$\log_x 5=-\frac{1}{2}; x=\frac{1}{25};$$

Ответ: $\frac{1}{25}.$

Тренировочное упражнение

$$\frac{\lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\lg\sqrt[3]{x-40}}=3;$$

Ответ:48.

Решим уравнение

$$\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg\left(27-3^{\frac{1}{x}}\right);$$

Решение:

Î .Ä.Ç: $27-3^{\frac{1}{x}}>0; 3^3>3^{\frac{1}{x}}; 3>\frac{1}{x}; x\neq 0;$

$$\lg 3+\frac{\lg 3}{2x}+\lg 2=\lg\left(27-3^{\frac{1}{x}}\right);$$

$$\lg 6\cdot 3^{2x}=\lg\left(27-3^{\frac{1}{x}}\right);$$

$$6\cdot 3^{2x}=27-3^{\frac{1}{x}};$$

Пусть $3^{\frac{1}{2x}}=y>0\Rightarrow 3^{\frac{1}{x}}=y^2;$ получим уравнение

$y^2+6y-27=0;$

$y_1=3; y_2=-9\notin$ Î .Ä.Ç.

Вернемся к подстановке

$3^{\frac{1}{2x}}=3; \frac{1}{2x}=1; x=\frac{1}{2};$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Тренировочное упражнение

$\log_{\sqrt{5}}\left(4^x-6\right)-\log_{\sqrt{5}}\left(2^x-2\right)=2;$

Ответ:2.

Решим уравнение

$\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8\sqrt{x^2};$

Решение:

Î .Ä.Ç: $-x>0; x<0; \log_8(-x)\geq 0; -x\geq 1; x\leq -1;$

$\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8|x|=0;$

т.к. по Î .Ä.Ç $x\leq -1,$ то имеем уравнение

$\sqrt{2\log_8(-x)}-\log_8(-x)=0;$

Пусть $\log_8(-x)=t\geq 0,$ получим уравнение

$\sqrt{2t}-t=0;$

$\sqrt{t}\left(\sqrt{2}-\sqrt{t}\right)=0;$

$t_1=0; t_2=2;$

Вернемся к подстановке

$\log_8(-x)=0; x_1=-1;$

$\log_8(-x)=2; x_2=-64;$

Ответ:-64;-1.

Тренировочное упражнение

$\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1;$

Ответ:3;81.

Решим уравнение

$x^{\lg x}=100x;$

Решение:

Î .Ä.Ç: $x>0;$

Прологарифмируем уравнение по основанию 10, получим

$\lg x\cdot\lg x=\lg 100+\lg x;$

$\lg^2 x-\lg x-2=0$

$\lg x=2; x_1=100;$

$\lg x=-1; x_2=0{,}1;$

Ответ:0,1;100.

Тренировочное упражнение

$(3\lg x)^{\lg^2 x+2\lg x^2+5}=\lg x^3;$

Ответ: $\sqrt[3]{10}$;0,01.

Решим уравнение.

$\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1;$

Решение:

Î .Ä.Ç: $x>0; x\neq 1; \log_x\sqrt{3x}>0; \log_3 x\neq 0;$

$\log_x(3x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\log_x 3+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_3 x}+1\right)>0;$

$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_3 x}+1\right)}=-\frac{1}{\log_3 x};$

Î .Ä.Ç: $-\frac{1}{\log_3 x}>0; \log_3 x<0; 0<x<1;$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_3 x}+1\right)=\frac{1}{\log_3^2 x};$

$\log_3^2 x+\log_3 x-2=0;$

$\log_3 x=-2; x_1=\frac{1}{9};$

$\log_3 x=1; x_2=3\notin$ Î .Ä.Ç.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Тренировочное упражнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} \cdot \log_5 x = -1;$$

Ответ: 0,04.

Решим уравнение

$$\log_7 x + \log_x 7 = \log_7^2 x + \log_x^2 7 - \frac{7}{4};$$

Решение:

$\hat{I}\ .\ddot{A}.Ç: x > 0; x \neq 1;$

Пусть $\log_7 x + \log_x 7 = y$, тогда $\log_7^2 x + \log_x^2 7 = y^2 - 2;$ получим уравнение

$4y^2 - 4y - 15 = 0;$

$y_1 = -\frac{3}{2}; y_2 = \frac{5}{2};$

Вернемся к подстановке

а) $\log_7 x + \log_x 7 = -\frac{3}{2};$

$\log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} = -\frac{3}{2};$

$2\log_7^2 x + 3\log_7 x + 2 = 0;$

$D = -7 < 0 \Rightarrow$ уравнение не имеет решений;

б) $\log_7 x + \log_x 7 = \frac{5}{2};$

$2\log_7^2 x - 5\log_7 x + 2 = 0;$

$\log_7 x = \frac{1}{2}; x_1 = \sqrt{7};$

$\log_7 x = 2; x_2 = 49;$

Ответ: $\sqrt{7}$;49.

Тренировочное упражнение

$$\log_7 2 + \log_{49} x = \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{3};$$

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Решим уравнение.

$$\log_{0,5}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8;$$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $x > 0;$

$$\left(\frac{\log_2 4x}{\log_2 0{,}5}\right)^2 + \log_2 x^2 - \log_2 8 = 8;$$

$$(\log_2 4 + \log_2 x)^2 + 2\log_2 |x| - 11 = 0;$$

т.к. $x > 0$ получим уравнение

$$4 + 4\log_2 x + \log_2^2 x + 2\log_2 x - 11 = 0;$$

Пусть $\log_2 x = t,$ получим уравнение

$$t^2 + 6t - 7 = 0;$$

$$t_1 = -7; t_2 = 1;$$

Вернемся к подстановке

$$\log_2 x = -7, x_1 = 2^{-7};$$

$$\log_2 x = 1; x_2 = 2;$$

Ответ: 2^{-7};2.

Тренировочное упражнение

$$2\lg x^2 - (\lg(-x))^2 = 4;$$

Ответ:-100.

Решим уравнение

$$\frac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x}{3}} + 2\log_3 \sqrt{x} + \log_3^2 x = 3;$$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $x > 0; x \neq 3;$

$$\frac{\log_3 x - 1}{\log_3 x - 1} + \log_3 x + \log_3^2 x = 3;$$

$$\log_3^2 x + \log_3 x - 2 = 0;$$

Пусть $\log_3 x = y,$ получим уравнение

$$y^2 + y - 2 = 0;$$

$$y_1 = -2; y_2 = 1;$$

Вернемся к подстановке

$$\log_3 x = -2; x_1 = 3^{-2}; x = \frac{1}{9};$$

$\log_3 x = 1; x_2 = 3 \notin$ Î .Ä.Ç.;

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Тренировочное упражнение

$$\frac{1 - \lg^2 x^2}{\lg x - 2\lg^2 x} = \lg x^4 + 5;$$

Ответ: $0,1; \sqrt[4]{10}$.

Решим уравнение.

$$\log_{0,5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0;$$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $x \neq 2; x \neq \dfrac{1}{16}; x \neq \dfrac{1}{4}; x > 0;$

Очевидно, что $x=1$ является решением уравнения

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x 0,5 + \log_x x} - \frac{14\log_x x^3}{\log_x 16 + \log_x x} + \frac{40\log_x \sqrt{x}}{\log_x 4 + \log_x x} = 0;$$

$$\frac{\log_x x^2}{1 - \log_x 2} - \frac{42}{4\log_x 2 + 1} + \frac{20}{2\log_x 2 + 1} = 0;$$

Пусть $\log_x 2 = t$; получим уравнение

$$\frac{1}{1-t} - \frac{21}{4t+1} + \frac{10}{2t+1} = 0;$$

$$\frac{2t^2 + 3t - 2}{(1-t)(4t+1)(2t+1)} = 0;$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2}; t_2 = -2;$$

Вернемся к подстановке

$$\log_x 2 = \frac{1}{2}; x_1 = 4;$$

$$\log_x 2 = -2; x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

Ответ: $1; \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Тренировочные упражнения

а) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2;$

Ответ: $\sqrt{3}; 3$.

б) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3;$

Ответ: $4; 2^{-\frac{1}{3}}$.

Решим уравнение.

$$x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5 + \lg x};$$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $x > 0;$

$\lg x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x};$

$\frac{\lg x + 5}{3}\lg x = 5 + \lg x;$

Пусть $\lg x = t;$ получим уравнение

$t^2 + 2t - 15 = 0;$

$t_1 = -5; t_2 = 3;$

Вернемся к подстановке

$\lg x = -5; x_1 = 10^{-5};$

$\lg x = 3; x_2 = 10^3;$

Ответ: $10^{-5}; 10^3.$

Тренировочное упражнение

$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5};$

Ответ: 100.

Решим уравнение.

$$\lg^2(4-x) + \lg(4-x)\left(x+\frac{1}{2}\right) - 2\lg^2\left(x+\frac{1}{2}\right) = 0;$$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $x \in \left(-\frac{1}{2}; 4\right); \lg\left(x+\frac{1}{2}\right) \neq 0;$

$$\frac{\lg^2(4-x)}{\lg^2\left(x+\frac{1}{2}\right)} + \frac{\lg(4-x)}{\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)} - 2 = 0;$$

Пусть $\frac{\lg(4-x)}{\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)} = y,$ получим уравнение

$y^2 + y - 2 = 0;$

$y_1 = 1; y_2 = -2;$

Вернемся к подстановке

$$\frac{\lg(4-x)}{\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)}=1;$$

$$\lg(4-x)=\lg\left(x+\frac{1}{2}\right);$$

$$4-x=x+\frac{1}{2};$$

$$x_1=\frac{7}{4};$$

$$\frac{\lg(4-x)}{\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)}=-2;$$

$$\lg(4-x)=-2\lg\left(x+\frac{1}{2}\right);$$

$$4-x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-2};$$

$$(4-x)\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2}=1;$$

$$4x^3-12x^2-15x=0;$$

$$x\left(4x^2-12x-15\right)=0;$$

$$x_2=0;$$

$$x_3=\frac{3}{2}+\sqrt{6};$$

$$x_4=\frac{3}{2}-\sqrt{6}\notin \text{Î .Ä.Ç};$$

Ответ: $0;\frac{3+2\sqrt{6}}{2};\frac{7}{4}.$

Тренировочное упражнение

$$\lg^2(x+1)-\lg(x+1)\cdot\lg(x-1)-2\lg^2(x-1)=0;$$

Ответ: $3;\sqrt{2}.$

Решим уравнение.

$$\frac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)}-1=\frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)};$$

Решение.

Î .Ä.Ç: $x > -2; x < 8; \log_{12}(x+2) \neq 0; x+2 \neq 1; x \neq -1; \log_6(x+2) \neq 0; x \neq -1;$

$$\frac{2-4\log_6 2}{\log_6 12} : \frac{\log_6(x+2)}{\log_6 12} - 1 = \frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)};$$

$$\frac{2\log_6 12 - 4\log_6 2}{\log_6 12} \cdot \frac{\log_6 12}{\log_6 12} - 1 = \frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)};$$

$$\frac{2\log_6 12 - 4\log_6 2 - \log_6(x+2)}{\log_6(x+2)} = \frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x-2)};$$

$$2\log_6 12 - 4\log_6 2 - \log_6(x+2) = \log_6(8-x);$$

$$\log_6 \frac{12^2}{2^4(x+2)} = \log_6(8-x);$$

$$\frac{9}{x+2} = 8-x;$$

$x^2 - 6x - 7 = 0; x_1 = 7; x_2 = -1 \notin$ Î .Ä.Ç;

Ответ: 7.

Тренировочное упражнение

$$\log_2 x - \frac{8}{2+\log_2 x} = \frac{4}{1+\log_x 4};$$

Ответ: 16.

Решим уравнение.

$$\log_{2\sin x}(\sin 2x) + 2\log_{\cos x}\left(4\sin^2 x\right) = 5;$$

Решение:

Î .Ä.Ç: $\sin x > 0; \cos x > 0; \Rightarrow x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right);$

$$\cos x \neq 1; \sin x \neq 1; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; x \neq \pi n, n \in Z;$$

$$\log_{2\sin x}(2\sin x \cdot \cos x) + 2\log_{\cos x}(2\sin x)^2 = 5;$$

$$\log_{2\sin x} 2\sin x + \log_{2\sin x} \cos x + 2\log_{\cos x}(2\sin x)^2 = 5;$$

$$1 + \frac{1}{\log_{\cos x} 2\sin x} + 4\log_{\cos x} 2\sin x = 5;$$

Пусть $\log_{\cos x} 2\sin x = y \neq 0$, получим

$$1 + \frac{1}{y} + 4y = 5;$$

$$4y^2 - 4y + 1 = 0;$$

$$y = \frac{1}{2};$$

Вернемся к подстановке

$\log_{\cos x} 2\sin x = \frac{1}{2};$

$2\sin x = (\cos x)^{\frac{1}{2}};$

$2\sin x = \sqrt{\cos x};$

$\cos x = 4\sin^2 x;$

$\cos x = 4 - 4\cos^2 x;$

$4\cos^2 x + \cos x - 4 = 0;$

Пусть $\cos x = t; -1 \le t \le 1,$ получим уравнение

$4t^2 + t - 4 = 0;$

$t_1 = \frac{-1+\sqrt{65}}{8};$

$t_2 = \frac{-1-\sqrt{65}}{8} \notin$ Î .Ä.Ç;

Вернемся к подстановке

$\cos x = \frac{\sqrt{65}-1}{8};$

$x = \pm\arccos\left(\frac{\sqrt{65}-1}{8}\right) + 2\pi k, k \in Z;$

Ответ: $\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{65}-1}{8}\right) + 2\pi k, k \in Z.$

Тренировочные упражнения

а) $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = 1;$

Ответ: $(-1)^n \arcsin 2^{-\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 3}}, n \in Z.$

б) $2\log_{\sin x} \mathrm{tg} x + \log_{\mathrm{ctg} x} \cos x = 1;$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

Решим уравнение.

$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162;$

Решение:

Î .Ä.Ç: $x > 0;$

$$\left(3^{\log_3 x}\right)^2 + x^{\log_3 x} = 162;$$

$$\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162;$$

$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162;$$

$$2x^{\log_3 x} = 162;$$

$$x^{\log_3 x} = 81;$$

$$\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 81;$$

$$\log_3^2 x = 4;$$

$$x_1 = 9;$$

$$x_2 = \frac{1}{9};$$

Ответ: $9; \frac{1}{9}$.

Тренировочное упражнение.

$$2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 1024;$$

Ответ: $8; \frac{1}{8}$.

Решим уравнение.

$$9 \cdot \left|\log_{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{x-1}\right| = 4\log_4\left(\frac{7}{2} - x\right);$$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $\log_{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{x-1} \neq 0; x-1 \neq 1; x \neq 2; \frac{7}{2} - x > 0; x < \frac{7}{2};$

$$x - 1 > 0; x > 1 \Rightarrow 1 < x < \frac{7}{2}; x \neq 2;$$

а) $\begin{cases} \log_{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{x-1} > 0; x > 2; \\ 9\log_{2\sqrt{2}} \sqrt[3]{x-1} = 4\log_4\left(\frac{7}{2} - x\right); \end{cases}$

$$9\log_{2\sqrt{2}}(x-1)^{\frac{1}{3}} = \log_{2^2}\left(\frac{7}{2} - x\right)^4;$$

$$9\log_{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}(x-1)^{\frac{1}{3}} = \log_{2^2}\left(\frac{7}{2}-x\right)^4;$$

$$\log_{2^{\frac{3}{2}}}(x-1)^3 = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{7}{2}-x\right)^4;$$

$$\frac{2}{3}\log_2(x-1)^3 = \log_2\left(\frac{7}{2}-x\right)^2;$$

$$\log_2(x-1)^2 = \log_2\left(\frac{7}{2}-x\right)^2;$$

$$(x-1)^2 = \left(\frac{7}{2}-x\right)^2;$$

$$x = \frac{9}{4} \in (2;+\infty);$$

б) $$\begin{cases} \log_{2\sqrt{2}}\sqrt[3]{x-1} < 0; x < 2; \\ 9\log_{2\sqrt{2}}\sqrt[3]{x-1} = -4\log_{2^2}\left(\frac{7}{2}-x\right); \end{cases}$$

$$9\log_{2^{\frac{3}{2}}}(x-1)^{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{2}\log_2\left(\frac{7}{2}-x\right);$$

$$6\log_2(x-1)^{\frac{1}{3}} = -2\log_2\left(\frac{7}{2}-x\right);$$

$$\log_2(x-1)^2 = \log\left(\frac{7}{2}-x\right)^{-2};$$

$$(x-1)^2 = \left(\frac{7}{2}-x\right)^{-2};$$

$$(x-1)^2 - \left(\frac{7}{2}-x\right)^{-2} = 0;$$

$$(x-1)^2 - \frac{1}{\left(\frac{7}{2}-x\right)^2} = 0;$$

$$\left(x-1-\frac{7}{2}+x\right)\left(x-1+\frac{7}{2}-x\right) = 0;$$

$$\left(2x-\frac{9}{2}\right) = 0;$$

$$x = \frac{9}{4} \notin (-\infty;2);$$

Ответ: $\frac{9}{4}$.

Тренировочное упражнение

$$\left|\log_2(3x-1) - \log_2 3\right| = \left|\log_2(5-2x) - 1\right|;$$

Ответ: $1; \frac{17}{12}; \frac{11}{6}$.

Решим уравнение

$(x+1)\log_3^2 x + 4x\log_3 x - 16 = 0;$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $x > 0;$

Пусть $\log_3 x = y;$ получим $(x+1)y^2 + 4xy - 16 = 0;$

Решим уравнение относительно y

$D = 16x^2 - 4(x+1)(-16) = 16(x^2 + 4x + 4) = 16(x+2)^2;$

$y_1 = \frac{4}{x+1};$

$y_2 = -4;$

Вернемся к подстановке

1) $y = \log_3 x$-возрастающая функция,

$y = \frac{4}{x+1}$ – убывающая функция,

значит, уравнение $\log_3 x = \frac{4}{x+1}$ имеет одно решение, очевидно, что это $x = 3;$

2) $\log_3 x = -4; x = 3^{-4}; x = \frac{1}{81};$

Ответ: $3; \frac{1}{81}$.

Тренировочное упражнение

$\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x;$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Решим уравнение

$-3x^2 + 6x - 2 = \log_2(x^2+1) - \log_2 x;$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $x > 0;$

$1 - 3(x-1)^2 = \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right);$

$\begin{cases} 1 - 3(x-1)^2 \le 1; \\ x + \frac{1}{x} \ge 2; \end{cases} \Rightarrow \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) \ge 1;$

Получим систему уравнений

$\begin{cases} 1 - 3(x-1)^2 = 1; \\ \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1; \end{cases} \Rightarrow x = 1;$

Ответ: 1.

Тренировочное упражнение

$x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4;$

Ответ: 2.

Решим уравнение.

$$\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\right) = 1 - \log_\pi x;$$

Решение:

$\hat{I}\ .\ddot{A}.\c{C}: x > 0; x + \frac{1}{x} \geq 2; \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 1 \Rightarrow$

$\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)$ существует, если $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \leq 1,$ поэтому уравнение может иметь решение только при $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 1,$ т.е. $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2};$ уравнение принимает вид

$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 - \log_\pi x;$

$\log_\pi x = 0;$

$x = 1;$

Ответ: 1.

Тренировочное упражнение

$\log_{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{\log_3 3 - \log_x 9} + 4 = 0;$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Решим уравнение

$\log_2 x^4 + \log_2 x^2 = 6;$

Решение:

$\hat{I}\ .\ddot{A}.\c{C}: x \neq 0;$

$4\log_2|x| + 2\log_2|x| = 6;$

$\log_2|x| = 1;$

$|x| = 2;$

$x = \pm 2;$

Ответ: 2;-2.

Тренировочные упражнения

а) $\log_2\left(\frac{x^4}{1-x^2}\right) - \log_2\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = 6;$

Ответ: нет решений.

б) $\log_2 \frac{x}{1-x^2} - \log_2 \frac{x^3}{1-x^2} = -2;$

Ответ: -2.

Решим уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2\right) = \log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right);$$

Решение:

Пусть $\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right) = y,$ тогда $x^2-2x-3 = \left(2+\sqrt{3}\right)^y;$

$x^2-2x-2 = \left(2+\sqrt{3}\right)^y + 1;$

получим уравнение

$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^y + 1\right) = y;$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^y + 1 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^y;$$

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^y + \frac{1}{\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)} = 1;$$

поскольку $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2-\sqrt{3}},$ то получим уравнение

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y = 1;$$

т.к. $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 1;$ то $y = 2$ — решение уравнения.

других решений это уравнение не имеет, докажем это.

Т.к. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} < 1$ и $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < 1$, то имеют место неравенства

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y < \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2;$$

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y < \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2;$$

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^y < \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 1;$$

а это значит, что при $y > 2$ не может быть решения.

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^{y} > \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^{2};$$

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^{y} > \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^{2};$$

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^{y} + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^{y} > \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^{2} + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^{2} = 1;$$

а это значит, что при $y < 2$ не может быть решения.
Вернемся к подстановке

$$\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2 - 2x - 3\right) = 2;$$
$$x^2 - 2x - 3 = \left(2+\sqrt{3}\right)^2;$$
$$x^2 - 2x - 10 - 4\sqrt{3} = 0;$$
$$D = 44 + 16\sqrt{3} = 4\left(11 + 4\sqrt{3}\right);$$
$$x = 1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}};$$

Ответ: $1 \pm \sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

Тренировочное упражнение

$$2\log_x\left(4+\sqrt{x}\right) = 2 - \log_{\sqrt{x}} 2;$$

Ответ: 16.

Решим уравнение

$$\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2\left(1-2x^2\right)^4};$$

Решение:

Î .Ä.Ç.: $1-2x^2 > 0; 1-2x^2 \neq 1; x > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2};$

Представим $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\log_{1-2x^2}\left(1-2x^2\right)$, и получим уравнение

$$\frac{3}{\log_2\left(1-2x^2\right)^4} = \frac{3}{4}\log_{1-2x^2} 2;$$

$$\log_{1-2x^2} x^4 = \log_{1-2x^2}\frac{1-2x^2}{8};$$

$$8x^4 = 1 - 2x^2;$$

$$8x^4 + 2x^2 - 1 = 0;$$

Пусть $x^2 = y > 0;$ получим

$8y^2+2y-1=0;$

$y_1=\frac{1}{4};$

$y_2=-\frac{1}{2}\notin \hat{I}\ .\ddot{A}.Ç;$

Вернемся к подстановке

$x^2=\frac{1}{4};$

$x_1=\frac{1}{2};$

$x_2=-\frac{1}{2}\notin \hat{I}\ .\ddot{A}.Ç;$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Тренировочное упражнение

$$\log_{3x+7}\left(9+12x+4x^2\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4;$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

Решим уравнение

$$3+\frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}=\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{75x}{4}-\frac{11}{x}\right);$$

Решение:

$\hat{I}\ .\ddot{A}.Ç: x>0; x\neq 2; \frac{75x}{4}-\frac{11}{x}>0 \Rightarrow \sqrt{\frac{44}{75}}<x<2;$

т.к. $3+\frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}=3+\log_{\frac{x}{2}}32=\log_{\frac{x}{2}}4x^3$

получим уравнение

$\log_{\frac{x}{2}}4x^3-\log_{\frac{x}{3}}\left(\frac{75x}{4}-\frac{11}{x}\right);$

$16x^4-75x^2+44=0;$

Пусть $x^2=y>0$, получим уравнение

$16y^2-75y+44=0;$

$y_1=4;$

$y_2=\frac{11}{16};$

Вернемся к подстановке

$x^2 = 4;$

$x_{1,2} = \pm 2;$

$x^2 = \frac{11}{16};$

$x_{3,4} = \frac{\pm\sqrt{11}}{4};$

Вернемся к Î .Ä.Ç и выполним отбор корней

$x = \frac{\sqrt{11}}{4};$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{4}$.

Тренировочное упражнение

$$\frac{\log_2\left(x^3+3x^2+2x-1\right)}{\log_2\left(x^3+2x^2-3x+5\right)} = \log_{2x} x + \log_{2x} 2;$$

Ответ: 1.

Решим уравнение

$$\sqrt{\log_2\left(2x^2\right)\log_4(16x)} = \log_4 x^3;$$

Решение:

$\text{Î .Ä.Ç}: x > 0; \log_2 x \ge 0;$

$$\sqrt{(1+\log_2 x)\left(2+\frac{1}{2}\log_2 x\right)\left(2+\frac{1}{2}\log_2 x\right)} = \frac{3}{2}\log_2 x;$$

$$(1+2\log_2 x)\left(2+\frac{1}{2}\log_2 x\right) = \frac{9}{4}\log_2^2 x;$$

$$2+\frac{1}{2}\log_2 x + 4\log_2 x + \log_2^2 x - \frac{9}{4}\log_2^2 x = 0;$$

$5\log_2^2 x - 18\log_2 x - 8 = 0;$

Пусть $\log_2 x = y \ge 0$, получим уравнение

$5y^2 - 18y - 8 = 0;$

$y_1 = 4;$

$y_2 = -\frac{2}{5} \notin \text{Î .Ä.Ç};$

Вернемся к подстановке

$\log_2 x = 4;$

$x = 16;$

Ответ: 16.

Тренировочное упражнение

$\sqrt{2-x} = \log_3(x-2);$

Ответ: нет решений.

Решим уравнение.

$$\log_{11}\log_3\log_2\left(\frac{2}{1-x}\right)=0;$$

Решение:

Î .Ä.Ç:

$$\begin{cases}\log_3\log_2\left(\dfrac{2}{1-x}\right)>0;\\ \log_2\left(\dfrac{2}{1-x}\right)>0;\\ \dfrac{2}{1-x}>0;\\ x\neq 0;\end{cases}$$

$$\log_3\log_2\left(\frac{2}{1-x}\right)=1;$$

$$\log_2\left(\frac{2}{1-x}\right)=3;$$

$$\frac{2}{1-x}=8;$$

$$x=\frac{3}{4};$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Тренировочное упражнение

$$\log_4\log_{16}\sqrt{x+1}=0;$$

Ответ: 16^{2} -1

Дополнительные задания для самостоятельного решения.

----

1) $\left|\log_{\sqrt{3}}x-2\right|-\left|\log_3 x-2\right|=2;$

Ответ: $\frac{1}{9}$;9.

2) $\left|x-1\right|^{\lg^2 x-\lg x^2}=\left|x-1\right|^3;$

Ответ: 0,1;2;1000.

3) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8;$

Ответ: 5.

4) $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x};$

Ответ: $10;10^{-\frac{9}{2}}$.

5) $\dfrac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)}-1=\dfrac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)};$

Ответ: 7.

6) $9x^{\lg x}+91x^{-\lg x}=60;$

Ответ: $10^{\pm\lg\frac{13}{3}};10^{\pm\lg\frac{7}{3}}$.

7) $\lg^2(4-x)+\lg(x-4)\lg\left(x+\frac{1}{2}\right)=2\lg^2\left(x+\frac{1}{2}\right);$

Ответ: $0;\frac{7}{4};\frac{3}{2}+\sqrt{6}$.

8) $\dfrac{1}{\log_7(5-x)}+\dfrac{3\log_{0,125}(x+3)}{\log_2(5-x)}=1;$

Ответ:-2.

9) $\lg^2(x-1)-\lg(x+1)\lg(x-1)=2\lg^2(x-1);$

Ответ: $\sqrt{2}$;2.

10) $\log_3 x-\dfrac{2}{1+\log_x 27}=\dfrac{6}{3+\log_3 x};$

Ответ: 9.

11) $\frac{3}{2}\left(\log_5(2x-3)^2\right)^2+12\left(\log_5\sqrt{x}\right)^2=\left(\log_5(2x-3)^3\right)\log_5 x^3;$

Ответ: $\frac{9}{4}$;3.

12) $1+\log_x(5-x)=\log_7 4+\log_x 7;$

Ответ:4.

13) $\lg(x-5)^2+\lg(x+6)^2=2;$

Ответ: $-5;4;\dfrac{-1\pm\sqrt{161}}{2}$.

14) $\log_{0,5\sin x}\sin x=\frac{1}{2};$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$.

15) $\lg^2\left(1+\frac{4}{x}\right)+\lg^2\left(1-\frac{4}{x+4}\right)=2\lg^2\left(\frac{2}{x-1}-1\right);$

Ответ: $\sqrt{2};\sqrt{6}$.

Раздел 3. Тригонометрические уравнения

Справочный материал

Формулы преобразования тригонометрических выражений

1.$sin^2a+cos^2b=1$
2.$1+tg^2=1/tg^2a$
3.$1+ctg^2 2=1/sin^2 2$
4.$sin(a\pm b)=sinacosb\pm cosasinb$
5.$cos(a\pm b)=cosacosb-+sinasinb$
6.$tg(a\pm b)=(tga\pm tgb)/(1-+tgatgb)$
7.$sin2a=2sinacosa=2tga/(1+tg^2a)$
8.$cos2a= cos^2a-sin^2a=2cos^2a-1=1-2sin^2a=(1-tg^2a)/(1+tg^2a)$
9.$tg2a=2tga/(1-tg^2a)$
10.$sin3a=3sina-4sin^3a=4sinasin(\Pi/3-a)sin(\Pi/3+a)$
11.$cos3a=4cos^3a-3cosa$
12.$tg3a=(3tga-tg^3a)/(1-3tg^2a)$
13.$sina/2=\pm\sqrt{(1-cosa)}/2$
14.$cosa/2=\pm\sqrt{(1+cosa)}/2$
15.$tga/2=\sqrt{(1-cosa)/(1+cosa)}=sina/(1+cosa)=(1-cosa)/sina$
16.$cos^2a=1/2(1+cos2a)$
17.$sin^2a=1/2(1-cos2a)$
18.$sinacosa=1/2sin2a$
19.$cosa+cosb=2cos(a+b)/2cos(a-b)/2$
20.$cosa-cosb=-2sin(a+b)/2sin(a-b)/2$
21.$sina+sinb=2sin(a+b)/2cos(a-b)/2$
22.$sina-sinb=2cos(a+b)/2sin(a-b)/2$
23.$tga\pm tgb=sin(a\pm b)/cosacosb$
24.$sinacosb=1/2(sin(a+b)+sin(a-b))$
25.$cosacosb=1/2(cos(a+b)+cos(a-b))$
26.$sinasinb=1/2(cos(a-b)-cos(a+b))$
27.$1+cosa=2cos^2a/2$
28.$1-cosa=2sin^2a/2$
29.$1+sina=2cos^2(\Pi/4-a/2)=(cosa/2+sina/2)^2$
30.$1-sina=2sin^2(\Pi/4-a/2)=(cosa/2-sina/2)^2$
31.$tga+ctga=2/sin2a$

Знаки тригонометрических функций

	четверти			
	1	2	3	4
Sina	+	+	-	-
Cosa	+	-	-	+
Tga	+	-	+	-
Ctga	+	-	+	-

Решение простейших тригонометрических уравнений

$\sin x = a$

Если $|a|>1$ - уравнение не имеет решений
Если $|a|\leq 1$, то
$X=(-1)^k \arcsin a+k\Pi$, $k\epsilon z$.

Частные случаи

$\sin x=1$, $x=\Pi/2+2\Pi k$, $k\epsilon z$
$\sin=-1$, $x=-\Pi/2+2\Pi k$, $k\epsilon z$
$\sin x=0$, $x=\Pi k$, $k\epsilon z$

$\cos x=a$

Если $|a|>1$ - уравнение не имеет решений
Если $|a|\leq 1$, то $x=\pm\arccos a+2\Pi k$, $k\epsilon z$

Частные случаи

$\cos a=1$, $x=2\Pi k$, $k\epsilon z$
$\cos a=-1$, $x=\Pi+2\Pi k$, $k\epsilon z$
$\cos a=0$, $x=\Pi/2+\Pi k$, $k\epsilon z$

$tg x=a$

$x=arctg a+\Pi k$, $k\epsilon z$

Частный случай

$Tg x=0$, $x=\Pi k$, $k\epsilon z$

. $ctg x=a$

$x=arcctg a+\Pi k$, $k\epsilon z$

Частный случай

$Ctg x=0$, $x=\Pi/2+\Pi k$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$\sqrt{3}tg(x/3+\Pi/3)=3$

Решение.

$tg(x/3+\Pi/3)=3/\sqrt{3}$,
$x/3+\Pi/3=arctg\sqrt{3}+\Pi k$, $k\epsilon z$
$x/3=\Pi k$, $k\epsilon z$

Ответ:

$x=3\Pi k$, $k\epsilon z$

Тренировочное упражнение

$6\sqrt{3}\cos(2x+3\Pi/4)=9$

Ответ: $-3\Pi/8\pm 5\Pi/12+\Pi k$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$

Решение.

т.к. $\cos x\neq 0$, разделим каждый член уравнения на $\cos^2 x$ и получим
$\sin^2 x/\cos^2 x+2\sin x\cos x/\cos^2 x-3\cos^2 x/\cos^2 x=0$
$tg^2 x+2tg x-3=0$

$tg x=1$ или $tg x=-3$

$x_1=\Pi/4+\Pi k$, $k\epsilon z$ $x_2=-arctg 3+\Pi n$, $n\epsilon z$

Ответ : $\Pi/4+\Pi k$ $k\epsilon z$, $-arctg 3+\Pi n$, $n\epsilon z$

Тренировочные упражнения

---

1). $2\cos^3x+\sin x-3\sin^2x\cos$

Ответ $x_1=arctg2+\Pi k$, $k\epsilon z$,
$x_{2,3}=arctg(1\pm\sqrt{5}/2)+\Pi n$, $n\epsilon z$

2) $2\sin^2x-3\sin x\cos x=\cos^2x=0$ Ответ: $\Pi/4+\Pi n$, $n\epsilon z$; Πk, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$(1+tgx+tg^2x+\ldots+tg^nx+\ldots)/(1-tgx+tg^2x-tg^3x+\ldots+(-1)^ntg^nx+\ldots)=1+\sin 2x$
при $|tgx|<1$

Решение.

В числителе и знаменателе левой части уравнения суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий, получили
$1/(1-tgx) : 1/(1+tgx)=1+2tgx/(tgx+tg^2x)$
$(1+tgx)/(1-tgx)-(1+tgx)^2/(1+tg^2x)=0$
$(2tg^2x(1+tgx))/((1-tgx)(1+tg^2x))=0$
$1+tgx\neq 0$ по ОДЗ,значит только
$tgx=0$, $x=\Pi k$, $k\epsilon z$

Ответ: Πk , $k\epsilon z$

Тренировочное упражнение

$(1+\sin x+\ldots+`\sin^2x+\ldots)/(1-\sin x+\ldots+(-1)^n\sin^nx+\ldots)=4/(1+tg^2x)$

Ответ : $(-1)^k\arcsin 1/2+\Pi k$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\sin 3x$

Решение

Разделим обе части уравнения на 2 и получим
$½\cos x-\sqrt{3}/2\sin x=\sin 3x$ или
$\sin\Pi/6\cos x-\cos\Pi/6\sin x=\sin 3x$, использовав формулы, получим
$\sin(\Pi/6-x)-\sin 3x=0$
$2\sin(\Pi/12-2x)\cos(\Pi/12+x)=0$
$\sin(\Pi/12-2x)=0$ или $\cos(\Pi/12+x)=0$
$\Pi/12-2x=\Pi n$, $n\epsilon z$ или $\Pi/12+x=\Pi/2+\Pi k$, $k\epsilon z$
$x_1=\Pi/24+\Pi n/2$, $n\epsilon z$
$x_2=5\Pi/12+\Pi k$, $k\epsilon z$

Ответ: $\Pi/24+\Pi n/4$, $n\epsilon z$,
$5\Pi/12+\Pi k$ $k\epsilon z$

Тренировочные упражнения

---

a) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos 3x$

Ответ: $\Pi n-\Pi/2$, $n\epsilon z$; $\Pi/24+\Pi k/2$, $k\epsilon z$

b) $\cos 3x-\sin x=\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)$

Ответ: $\Pi/8+\Pi n/2$; $n\epsilon z$; $\Pi/3+\Pi k$; $k\epsilon z$

Решим уравнение

$\cos 2x+3\sin x=2$

Решение.

$\cos^2x-\sin^2x+3\sin x-2=0$
$1-\sin^2x-\sin^2x+3\sin x-2=0$
$1-2\sin^2x+3\sin x-2=0$
$2\sin^2x-3\sin x+1=0$
$\sin x=1$ или $\sin x=1/2$
$x_1=П/2+Пk\ k\epsilon z$ или $x=(-1)^n*П/6+Пn$, $n\epsilon z$

Ответ:$П/2+2Пk$, $k\epsilon z$. $(-1)^n+Пn$, $n\epsilon z$

Тренировочное упражнение

а)$2tgx/4-2ctgx/4=3$

Ответ:$4arcctg2+4Пn$, $n\epsilon z$; $-4arctg1/2+4Пk$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$\sin 2x/(1+\sin x)=-2\cos x$

Решение.

ОДЗ : $1+\sin x\neq 0$, $\sin x\neq -1$
$\sin 2x=-2\cos x-2\sin x\cos x$
$\sin 2x+2\cos x+2\sin x\cos x=0$
$\sin 2x+2\cos x(1+\sin x)=0$
$2\sin x\cos x+2\cos x(1+\sin x)=0$
$2\cos x(\sin x+1+\sin x)=0$
$2\cos x(2\sin x+1)=0$
$\cos x=0$ или $\sin x=-1/2$
$x=П/2+Пn$, $n\epsilon z$ или $x=(-1)^k(-П/6)+Пk$, $k\epsilon z$

Ответ:$П/2+Пn$, $n\epsilon z$ или $(-1)^{k+1}П/6+Пk;k\epsilon z$

Тренировочное упражнение

$\mathrm{Sin}2x/(1-\cos x)=2\sin x$

Ответ:$Пn$, $n\epsilon z$; $\pm П/3+2Пk$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$\sin(П/2+2x)ctg3x+\sin(П+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0$

Решение.

$\cos 2x\cos 3x/\sin 3x-\sin 2x-\sqrt{2}\cos 5x=0$
$\cos 2x\cos 3x-\sin 2x\sin 3x-\sqrt{2}\sin 3x\cos 5x=0$, использовав формулу, получим
$\cos 5x-\sqrt{2}\sin 3x\cos 5x=0$ или
$\cos 5x(1-\sqrt{2}\sin 3x)=0$
$\cos 5x=0$ или $\sin 3x=\sqrt{2}/2$
$x=П/10+Пn/5$, $n\epsilon z$;$x=(-1)^kП/12+Пk/3$, $k\epsilon z$

Ответ: $П/10+Пn/5$, $n\epsilon z$; $(-1)^kП/12+Пk/3$, $k\epsilon z$

Тренировочное упражнение

$\mathrm{Sin}2x+\sin(П-8x)=\sqrt{2}\cos 3x$

Ответ:$П/6+Пm/3$, $n\epsilon z$; $(-1)^kП/20+Пk/5$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$\sin(15^o+x)+\sin(45^o-x)=1$

Решение

$2\sin(15^o+45^o+x-x)/2\cos(15^o+x-45^o+x)/2=1$
$2\sin 30^o\cos 2x-30^o/2=1$

$Cos(2x-П/6)/2=1$

$cos(x-15^o)=1$

$x-15^o=2Пn$, nєz

$x=15^o+2Пn$, nєz

Ответ: $15^o+2Пn$, nєz

Тренировочное упражнение

-------- ----------------------------

$sin(П/12+x)+sin(П/4-x)=1$

Ответ: П/12+2Пk, kєz

Решим уравнение

$sin5x+cos5x=0$

Решение

Делим на cos5x не равное 0 , получим

Sin5x/cos5x+1=0 , tg5x=-1

5x=-П/4+Пn , nєz

x=-П/20+Пn/5 , nєz

Ответ:-П/20+Пn/2 , nєz

Тренировочное упражнение

2sin5x-7cos5x=0

Ответ:1/5arctg3.5+Пn , nєz

Решим уравнение

$tg^2Пx+11/3cos4Пx+1/3=0$

Решение.

$(1-cos2x)/(1+cos2x)+4/3(2cos^2 2x-1)+1/3=0$

Пусть cos2x=y , -1<y≤1

y≠-1,

получим

$(1-y)/(1+y)+(8y^2-4)/3+1/3=0$

$3-3y+8y^2-4+8y^2-4y+1+y=0$

$8y^3+8y^2-6y=0$

$2y(4y^2+4y-3)=0$

y1=0 , y2=1/2 , y3=3/2 –не принадлежит О.Д.З.

1.cos2x=0

2x=П/2+Пk , kєz

x=П/4+Пk/2 , kєz

2.cos2x=1/2

2x=±arccos1/2+2Пn , nєz

2x=±П/3+2Пn , nєz

x=±П/6+Пn , nєz

Ответ:П/4+Пk/2 ;±П/6+Пn nєz

Тренировочные упражнения.

----

a)$sin^4x+sin^4(x+П/4)+sin^4(x-П/4)=9/8$

Ответ:П/12+Пn/2, nєz

b)$sin2Пx+sin^2 4Пx=sin^2 6Пx$

Ответ: n/2;1/20+n/5 ,nєz

Решим уравнение

$\sqrt{9-x^2}(\sin^2x-5/2\sin2x+4\cos^2x)=0$

Решение.

ОДЗ : $9-x^2\geq0$,

$x\in[-3;3]$

$\sqrt{9-x^2}=0$

$x1,2=\pm3$

$\sin^2x-5\sin x\cos x+4\cos^2x=0$

$tg^2x-5tgx+4=0$

$tgx=4$ или $tgx=1$

$x=\Pi/4+\Pi n$, $n\epsilon z$ или

$x=arctg4+\Pi k$, $k\epsilon z$

с учётом ОДЗ: получим $\Pi/4$; $-3\Pi/4$;$arctg4+\Pi к$,

Ответ: $\Pi/4;-3\Pi/4;arctg4;arctg4+\Pi к$, кэZ

Тренировочное упражнение.

$(1+\sin^2\sqrt{x+1}+\cos^2\sqrt{x+1})(5\sin^2x+\sin2x-3\cos^2x-2)=0$

Ответ: $\Pi/4+\Pi n$ $n=0,1,2\ldots$(целые неотриц.числа)

$arctg(-5/3)+\Pi k$, $k=1,2,3..k\in n$

Решим уравнение

$\sin^53x+\sin^3x\cos^23x+8\sin^23x\cos^33x+8\cos^53x=0$

Решение.

разелим на $\cos^53x\neq0$ и получим

$tg^53x+tg^33x+8tg^23x+8=0$

Введем замену $tg3x=y$, получим

$y^5+y^3+8y^2=0$

$y^3(y^2+1)+8(y^2+1)=0$

$(y^3+8)(y^2+1)=0$

$y^3+1=0$ - не имеет решений , $y=-2$- корень уравнения

Вернёмся к подстановке

$Tg3x=-2$, Ответ:$-1/3arctg2+\Pi n/3;n\epsilon z$

Тренировочное упражнение

$Sin^4x\cos^2x-2\sin^3x\cos^3x-\sin^2x\cos^4x+2\sin x\cos^5x=0$

Ответ : $arctg2+\Pi n$, $n\epsilon z$; $\pm\Pi/4+\Pi k$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$2\sin x=3(1-\cos x)$

Решение

$2\sin x=3-3\cos x$

$2\sin x+3\cos x=3$

$(4tgx/2+3-3tg^2x/2)/(1+tg^2x/2)=3$

Пусть $tgx/2=y$, получим

$(4y+3-3y^{2)}/(1+y^{2)}=3$ $\sin x=2y/1+y^2$ $\cos x=1-y^2/1+y^2$

$6y^2-4y=0$

$2y(3y-2)=0$

$y1=0$, $y2=2/3$

$tgx/2=0$ $tgx/2=2/3$

Ответ: $2\Pi n$, $n\epsilon z$, $2arctg2/3+2\Pi k$, $k\epsilon z$

Тренировочные упражнения

а)$\cos4x+2\sin^2x=0$

Ответ: $\Pi/4+\Pi n/2$, $n\epsilon z;\pm\Pi/6+\Pi k$, $k\epsilon z$

b)$3\sin x-4\cos x=5$

Ответ : $2arctg3+2\Pi k$, $k\epsilon z$

в)$3\sin5x-2\cos5x=3$

Ответ: $\Pi/10+2\Pi k/5$, $k\epsilon z;2/5arctg5+2\Pi k/5$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$$\sin2^x/\sin2^{x-2}\cos2^{x-2}=2\sqrt{3}$$

Решение

Пусть $2^{x-2}=y>0$, получим

$\sin y/\sin y/4\cos y/4=2\sqrt{3}$

$\sin y/2\sin y/4\cos y/4=\sqrt{3}$

$\sin y/\sin y/2=\sqrt{3}$ или $2\sin y/2\cos y/2/\sin y/2=\sqrt{3}$

$\cos y/2=\sqrt{3}/2$

$y/2=\pm\Pi/6+2\Pi n$, $n\epsilon z$

$y=\pm\Pi/3+4\Pi n$, $n\epsilon z$ $y1=\Pi/3+4\Pi n_1>0$

$y>0$ $y2=-\Pi/3+4\Pi n_2>0$

$\Pi/3+4\Pi n_1>0$ $\{n_1>-\Pi/3*4\Pi;n_1=1\ 2\ 3\ \ldots$

$-\Pi/3+4\Pi n_2>0$ $\{\Pi/3*4\Pi;n_2=1\ 2\ \ldots$

$-\Pi/3+4\Pi n_2>0$

$2^x=\Pi/3+4\Pi n$

$x^1=\log_2(\Pi/3+4\Pi n_1)$, $n_1= 0\ 1\ 2\ 3\ldots$

$x2=\log_2(-\Pi/3+4\Pi n_2)$, $n_2=1\ 2\ 3\ldots$

Ответ: $\log_2(\Pi/3+4\Pi n_1)$, $n_1= 1\ 2\ 3$

$\log_2(-\Pi/3+4\Pi n_2)$ $n_2=1\ 2\ 3\ldots$

Тренировочное упражнение

---.

$\sin4x/(4\cos x+\cos3x)=\sin(\Pi+x)$

Ответ: Πn $n\epsilon z$; $\pm\arccos(-1/3)+\Pi k$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$$\sin^24x+\cos^2x=2\sin4x\cos^4x$$

Решение

Пусть $\sin4x=y$, $-1\le y\le1$, получим:

$y^2-2y\cos^4x+\cos^2x=0$

$D=4\cos^8x-4\cos^2x=4\cos^2x(\cos^6x-1)$

$D=0$

$\cos x=0$ при или $\cos^6x=1$ при

$y=0$ $y=1$

$\cos x=0$ или $\cos x=\pm1$

$\sin4x=0$ $\sin4x=1$

$x=\Pi/2+\Pi n$, $n\in z$ или $x=2\Pi k$, $k\in z$

$x=\Pi n/4$ - общее решение $x=\Pi+2\Pi k$, $k\in z$ - нет общего решения

$x=\Pi/8+\Pi k/2$, $k\in z$

$x=\Pi/2+\Pi n$, $n\in z$

Ответ: $\Pi/2+\Pi n$, $n\in z$

Тренировочные упражнения

.

a) $\sin 4x/(4\sin x-\sin 3x)=\sin(\Pi/2+x)$

Ответ: $\pm\Pi/6+\Pi k$, $k\in z$

b) $\cos^2 3x-\cos^4 x\cos 3x+1/4\cos^2 x=0$

Ответ: $\Pi/2 +\Pi k$, $k\in z$

Решим уравнение

$\sin\Pi x^2=1$

Решение

$\Pi x^2=\Pi/2+2\Pi k$, $k\in z$

$x^2=1/2+2k$

$x=\sqrt{1/2+2k}$

$x=-\sqrt{1/2+2k}$

при $1/2+2k\geq 0$, $k\in z$ $x=\pm\sqrt{1/2+2k}$, $k\in N\cup\{0\}$

Ответ: $\pm\sqrt{1/2+2k}$, $k\in N\cup\{0\}$

Тренировочные упражнения

а) $\mathrm{Sin}\,\Pi\sqrt{x}=-1$

Ответ: $(2к-1/2)^2$,к-целое

б) $\sin(\Pi\sin x)=-1$

Ответ: $(-1)^{k+1}\Pi/6+\Pi k$, $k\in z$

в) $\mathrm{tg}(\Pi\sin\Pi x)=\sqrt{3}$

Ответ: $(-1)^k 1/\Pi\arcsin 1/3+k$, $k\in z$

Решим уравнение

$\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$

Решение

$-2\sin 8x\cos x-2\sin 2x\cos x=0$

$2\sin x(\sin 8x+\sin 2x)=0$

$4\sin x\cos 5x\cos 3x=0$

при $\sin x=0$, $x=\Pi k$, $k\in z$

при $\cos 3x=0$, $x=\Pi/6+\Pi n/3$, $n\in z$ 1-ое и 3-е уравнения можно объединить в одно

при $\sin 5x=0$, $x=\Pi m/5$, $m\in z$

$x=\Pi/6+\Pi n/3$, $n\in z$

Ответ: $\Pi/6+\Pi n/3$, $n\in z$; $\Pi m/5$, $m\in z$

Тренировочные упражнения
----

a)$2\sin 2x\cos x-\sin 2x=0$

Ответ: $\Pi n/2, n\epsilon z; \pm\Pi/3+2\Pi k,\ k\epsilon z$

b)$\sin x+\sin 5x=\sim 3x+\sin 7x$

Ответ: $\Pi/4+\Pi k/2, k\epsilon z; \Pi/8+\Pi m/4, n\in z$

Решим уравнение

$\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x$

Решение.

$(1-\cos 6x)/2+(1-\cos 8x)/2=(1-\cos 10x)/2+(1-\cos 12x)/2$

$2-\cos 6x-\cos 8x-2+\cos 10x+\cos 12x=0$

$(\cos 10x+\cos 12x)-(\cos 8x+\cos 6x)=2\cos 11x\cos x-2\cos 7x\cos x=2\cos x(\cos 11x-\cos 7x)=-2\cos x\sin 9x\sin 2x=0$

при $\cos x=0$, $x=\Pi/2+\Pi n$, $n\epsilon z$

при $\sin 9x=0$, $x=\Pi k/2$, $k\epsilon z$

при $\sin 2x=0$, $x=\Pi l/2$, $l\in z$

Решения 1-го и 3-го уравнений можем объединить

$x=\Pi l/2, l\in z$

Ответ: $\Pi l/2,\ l\in z; \Pi k/9,\ k\epsilon z$

Тренировочные упражнения
----

a)$4+2\cos x=3\cos^2(x/2-\Pi/4)$

Ответ: $\pm(\Pi-\arccos 4/5)+2\Pi k$, $k\epsilon z$

b)$\mathrm{ctg}^4 2x+\sin^{-4}2x=25$

Ответ: $\pm\Pi/12+\Pi k/2$, $k\epsilon z$

в)$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=1.5$

Ответ: $\Pi/8+\Pi k/4, k\epsilon z; \pm\Pi/3+\Pi n$, $n\epsilon z$

Решим уравнение

$40(\sin^3 x/2-\cos^3 x/2)/(16\sin x/2-25\cos x/2)=\sin x$

Решение

$40(\sin^3 x/2-\cos^3 x/2)=(16\sin x/2-25\cos x/2)\sin x$

$\sin x=2\sin x/2\cos x/2$, получим

$40(\sin^3 x/2-\cos^3 x/2)=(16\sin x/2-25\cos x/2)$

$20\sin^3 x/2-16\sin^2 x/2\cos x/2+25\sin x/2\cos^2 x/2-20\cos^3 x/2=0$

Разделим на $\cos^3 x/2\neq 0$

$20y^3-16y^2+25y-20=0$, где $y=\mathrm{tg}x/2$

$4y^2(5y-4)+5(5y-4)=0$

$(5y-4)(4y^2+5)=0$

$5y-4=0$ или $4y^2+5=0$

$y1=4/5$, второе уравнение решений не имеет

вернемся к замене $\mathrm{tg}x/2=4/5$

Ответ: $2\mathrm{arctg}4/5+2\Pi k$, $k\epsilon z$

Тренировочные упражнения
----

a)$5(1-\sin 2x)-16(\sin x-\cos x)+3=0$

Ответ: $\Pi/4+(-1)^n \arcsin\sqrt{2}/10+\Pi n$, $n\epsilon z$

b)$2(1+\sin 2x)=\mathrm{tg}(\Pi/4+x)$

Ответ: $-\Pi/4+\Pi k$, $k\epsilon z; \pm\Pi/6+\Pi n$, $n\epsilon z$

Решим уравнение

$8\cos x+15\sin x=17$

Решение.

Разделим обе части на 15 получим $8/15\cos x+\sin x=17/15$,

пусть $tga=8/15$, получим

$Tga\cos x+\sin x=17/15$

$Sina\cos a-\cos a\sin x=17/15\cos a$

$Sin(x+a)=17/15\cos a$

Из формулы $1+tg^2a=1/\cos^2a$; $\cos a=1/\sqrt{1+tg^2a}$,

Получаем

$17/15\cos a=17/151/\sqrt{1+tg^2a}=17/151/\sqrt{1+64/225}=17/15\ 15/\sqrt{289}=1$,

имеем $\sin(x+a)=1$

$x+a=\Pi/2+2\Pi n$, $n\epsilon z$

$x=-a+\Pi/2+2\Pi n$, $n\epsilon z$

$x=-arctg8/15+\Pi/2+2\Pi n$, $n\epsilon z$

Ответ: $-arctg8/15+\Pi/2+2\Pi n$, $n\epsilon z$

Тренировочное упражнение

$2\sin x-\cos x=2/5$

Ответ: $2arcctg3+2\Pi k$, $k\epsilon z$
$-2arctg7+2\Pi n$, $n\epsilon z$

Решим уравнение

$2^{\cos x}=\cos x+1/\cos x$

Решение.

Так как $|\cos x|\leq 1$, то $0<2^{\cos x}\leq 2$

равенство возможно только при условии:$\cos x=1$

$2^1=1+1/1$ - верное равенство, значит

$x=2\Pi k$, $k\epsilon z$ Ответ: 2Пк, кэz

Тренировочные упражнения

----

a)$\cos\sqrt{x}=\cos x$

Ответ:$1\pm(\sqrt{1+8\Pi k})/2+2\Pi k$, $k\epsilon z$

b)$(\cos 4x-\cos 2x)^2=5-\sin^2 3x$

Ответ:$\Pi/2+\Pi n$, n эz

Решим уравнение

$1/\sin^2x+1/\cos^22x+1/\cos^24x-\sin x+\cos 2x-\cos 4x=0$

Решение

$1/\sin^2x-\sin x+1/\cos^22x+\cos 2x-\sin x+\cos 2x-\cos 4x=0$

$1-\sin^3x/\sin^2x/\sin^2x+1+\cos^32x/\cos^22x+1-\cos^34x/\cos^24x=0$

ОДЗ:$\sin x\neq 0;\cos 2x\neq 0;\cos 4x\neq 0$

$1-\sin^3x\geq 0$, $1+\cos^32x\geq 0$

$1-\cos^34x\geq 0$, $\sin^2x>0$, $\cos^22x>0$,

$\cos^24x>0$

С учётом этого имеем

$1-\sin^3x=0$; $\sin^3x=1$

$1+\cos^32x=0$; $\cos^32x=-1$

$1-\cos^34x=0$; $\cos^34x=1$

sinx=1 ; x=П/2+2Пn , nєz
cos2x=-1 ; 2x=П+2Пm , mЄz
$\cos^3 4x=1$; 4x=2Пk , kєz

x=П/2+2Пn , nєz
x=П/2+Пm, Объединив решения, получим
x=Пk/2, kєz

Ответ: П/2+2Пn ,nєz

Тренировочное упражнение

$1/\cos^2 x+1/\cos^2 2x+1/\cos^2 4x+\cos x-\cos 2x-\cos 4x=0$

Ответ: П+2Пn , nєz

Решим уравнение

$x^2+2x\cos(x-y)+\cos^2(x-y)+\sin^2(x-y)=0$

Решение.

$(x+\cos(x-y))^2+\sin^2(x-y)=0$

x+cos(x-y)=0 ,
sin(x-y) =0 , x-y=Пk kєz

x=y+Пk , kєz
y+Пk+cos(y+Пk-y)=0
y+Пk+cosПk=0
$y=-\Pi k-\cos\Pi k=-\Pi k+(-1)^{k+1}$
$y=-\Pi k+(-1)^{k+1},$ kєz ; $y=-\Pi k+(-1)^{k+1}$
x=y+Пk , kєz ; $x=-\Pi k+(-1)^{k+1}+\Pi k$

$y=-\Pi k+(-1)^{k+1}$
$x=(-1)^{k+1}-\Pi k$

Ответ: $x=(-1)^{k+1}$;$y=(-1)^{k+1}-\Pi k$, kєz

Тренировочное упражнение

$\mathrm{Sin}\Pi x+\sin 5\Pi x=y^2+2y+3$

Ответ:x=1/2+2n , y=-1

Решим уравнение

$tg^2x+ctg^2x+3tgx+3ctgx+4=0$

Решение.

Пусть tgx+ctgx=y , тогда

$tg^2x+ctg^2 x+2=y^2$

получаем уравнение

$y^2-2+3y+4=0$ или

$y^2+3y+2=0$
$y^2+3y+2=0$
y1=-1
y2=-2 вернемся к подстановке, получим

tgx+ctgx=-1
tgx+ctgx=-2
пусть tgx=a , получим

$a+1/a=-1$, $a^2+1+a=0$ - в этом уравнении решений нет
$a+1/a=-2$, $a^2+1+2a=0$, $a=-1$, вернемся к замене
$tgx=-1$, $x=-\Pi/4+\Pi k$, кэz

Ответ: $-\Pi/4+\Pi k$, kєz

Тренировочные упражнения

a) $tg^4x+ctg^4x+tg^2x+ctg^2x=4$

Ответ: $\Pi/4+\Pi k/2$, kєz

b) $tg^3x+tg^2x+ctg^2x+ctg^3x=4$

Ответ: $\Pi/4+\Pi k$, kєz

Решим уравнение

$$\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$$

Решение.

Пусть $\sin x+\cos x=t$, тогда
$\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x=t^2$
$1+2\sin x\cos x=t^2$
$\sin x\cos x=t^2-1/2$, получим уравнение
$t+(t^2-1)/2=1$
$t^2+2t-3=0$
$t1=-3$
$t2=1$, вернемся к замене
$\sin x+\cos x=-3$, $\cos(x-\Pi/4)=-3\sqrt{2}/2$
$\sin x+\cos x=1$, $\cos(x-\Pi/4)=\sqrt{2}/2$
первое уравнение решений не имеет, т.к. $-1\leq\cos(x-\Pi/4)\leq1$
$x=\Pi/4\pm\Pi/4+2\Pi k$, kєz

$x=\Pi/2+2\Pi k$, kєz
$x=2\Pi n$, nєz

Ответ: $\Pi/2+2\Pi k$, kєz; $2\Pi n$, nєz

Тренировочные упражнения

a) $\sin x+\cos x=1+\sin x\cos x$

Ответ: $2\Pi k$, kєz; $\Pi/2+2\Pi n$, nєz

b) $\sin^3x+\cos^3x=1$

Ответ: $2\Pi k$, kєz; $\Pi/2+2\Pi n$, nєz

Решим уравнение

$$\sin x+5\cos x+5=0$$

Решение.

$\sin x=2tgx/2/(1+tg^2x/2)$, $\cos x=(1-tg^2x/2)/(1+tg^2x/2)$
$2tgx/2/(1+tg^2x/2)+5(1-tg^2x/2)/(1+tg^2x/2)+5=0$
$2tgx/2+5(1-tg^2x/2+5(1+tg^2x/2)=0$
$tgx/2=-5$, $x=-2arctg5+2\Pi k$, kєz
Необходимо определить являются ли числа из множества
$\Pi+2\Pi n$, nєz корнями уравнения
$Sin(\Pi+2\Pi n)+5\cos(\Pi+2\Pi n)-5=0$
$0-5+5=0$
Проверка обязательна, т. к. при использовании этих формул область определения сужается на множество
$\Pi+2\Pi n$, nєz

Ответ: $-arctg5+2\Pi k$, kєz; $\Pi+2\Pi n$, nєz

Тренировочные упражнения

----

a) $2\cos x+\sin x=-2$

Ответ: $\Pi+2\Pi k$, $k\epsilon z$; $2\arccos 2/\sqrt{5}-\Pi+2\Pi n$, $n\epsilon z$

b) $(\cos x-\sin x)(2tgx+1/\cos x)+2=0$

Ответ: $\pm\Pi/3+2\Pi k$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$4\cos x\cos 2x\cos 3x=\cos 6x$

Решение.

Умножим обе части уравнения на $\sin x\neq0$, $x\neq\Pi m$, $m\in z$

$4\sin x\cos x\cos 2x\cos 3x=\cos 6x\sin x$

$\sin 4x\cos 3x=\cos 6x\sin x$

$\frac{1}{2}(\sin 7x+\sin x)=1/2(\sin 7x-\sin 5x)$

$\sin x+\sin 5x=0$

$2\sin 3x\cos 2x=0$

$\sin 3x=0$, $\cos 2x=0$

$x=\Pi k/3$, $k\epsilon z$; $x=\Pi/4+\Pi n/2$, $n\epsilon z$

Из полученных чисел исключаем все числа вида $x=\Pi m$, $m\in z$

$\Pi k/3\neq\Pi m$, $k\neq3p$, $p\in z$

$\Pi/4+\Pi n/2\neq\Pi m$, $\frac{1}{4}(1+2n)\neq m$

$1+2n\neq4m$

$k\neq3p$, $p\in z$

$k+2n\neq4m$, $m\in z$

При всех целых m и n в правой части второго неравенства стоит чётное число, а в левой нечётное, значит m и n- любые целые числа

Ответ: $\Pi k/3$, $k\epsilon z$; $k\neq3p$, $p\in z$; $\Pi/4+\Pi n/2$, $n\epsilon z$

Тренировочные упражнения

----

a) $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=-0/5$

Указание : умножение на $2\sin x\neq0$

Ответ: $\Pi k/9$, $k\epsilon z$, $k\neq9p$, $p\in z$

b) $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=1/16$

Ответ: $2\Pi k/15$, $k\epsilon z$; $k\neq15p$, $p\in z$

$\Pi/17+2\Pi n/17$, $n\epsilon z$, $n\neq17m+8$, $m\in z$

Решим уравнение.

$(2-2\sin^2x-\cos x)/(6x^2+5\Pi x+\Pi^{2)}=0$

Решение.

$2-2\sin^2x-\cos x=0$

$6x^2+5\Pi x+\Pi^2\neq0$

$2\cos^2x-\cos x=0$

$x\neq-\Pi/2$

$x\neq-\Pi/3$

$x=\Pi/2+\Pi k$, $k\epsilon z$, $x\neq-\Pi/2$

$x=\pm\Pi/3+2\Pi n$, $n\epsilon z$, $x\neq-\Pi/3$

$x=\Pi/2+\Pi k$, $k\epsilon z$, $k\neq-1$

Ответ: $\Pi/3+2\Pi n$, $n\epsilon z$; $-\Pi/3+2\Pi m$, $m\neq0$, $m\in z$

Тренировочное упражнение

$\cos\Pi x/x-1/2=0$

Ответ: $\frac{1}{2}+k$, $k\epsilon z$, $k\neq0$

Решим уравнение

$\sqrt{5-2sinx}=6sinx-1$

Решение.

Пусть sinx=y

$\sqrt{5-2y}=6y-1$, получим

$5-2y=(6y-1)^2$ при

$6y-1\geq0$

$t1=1/2$, $t2=-2/9$ –не принадлежит ОДЗ, вернемся к подстановке

при $t\geq1/6$

$sinx=1/2$, $x=(-1)^k\Pi/6+\Pi k$, kєz

Ответ: $(-1)^k$ $\Pi/6+\Pi k$, kєz

Тренировочные упражнения

----

a)$\sqrt{10-18cosx}=6cosx-2$

Ответ: $\pm\Pi/3+2\Pi k$, kєz

b)$\sqrt{2cosxsin2x}=\sqrt{5}sinx+4sin2x$

Ответ: Πk , kєz;$2\Pi/3+2\Pi n$, nєz

Решим уравнение

$|sinx|=sinx+2cosx$

Решение.

1. $sinx\geq0$

$sinx=sinx+2cosx$

cosx=0 , $x=\Pi/2+\Pi m$, mЄz

Из этих значений необходимо выбрать те, которые лежат в промежутке где, $sinx\geq0$, т.е.$x=\Pi/2+2\Pi n$, nєz

2. sinx<0

$-sinx=sinx+2cosx$

$sinx+cosx=0$

$\sqrt{2}sin(x+\Pi/4)=0$

$x=-\Pi/4+\Pi k$, kєz

т.к. sinx<0 , $x=-\Pi/4+2\Pi l$, lЄz

Ответ: $\Pi/2+2\Pi n$, nєz ; $-\Pi/4+2\Pi l$,lЄz

Тренировочные упражнения

----

a)$|cosx|=cosx-2sinx$

Ответ: $\Pi/4 +\Pi(2n+1)$, nєz

b)$|tgx|=tgx-1/cosx$

Ответ:$5\Pi/6+2\Pi n$, nєz

Решим уравнение

$sinx+sin5x=2$

Решение

Так как $|sinx|\leq1$ и $|sin5x|\leq1$, то уравнение имеет решение при условии

sinx=1 и

$\sin 5x=1$ получим

$x=\Pi/2+2\Pi k$, $k\epsilon z$

Тренировочное упражнение

$Sin^9x+cos^9x=1$

Ответ: $2\Pi n$, $n\epsilon z$;$\Pi/2+2\Pi n$, $n\epsilon z$

Решим уравнение

$sin^5x+cos^5x=2-sin^4x$

Решение.

Запишем очевидные неравенства

$Sin^5x\le sin^2x;cos^5x\le cos^2x$, отсюда

$Sin^5x+cos^5x\le sin^2x+cos^2x=1$

$2-sin^4x\ge 1$

Исходное уравнение равносильно условиям:

1. $sin^5x=sin^2x$ Решим третье уравнение
2. $cos^5x=cos^2x$ $sin^4x=1$, $x=\Pi/2+\Pi k$, $k\epsilon z$
3. $2-sin^4x=1$

Эти решения удовлетворяют 1 и 2 уравнениям

Ответ: $\Pi/2+\Pi k$, $k\epsilon z$.

Тренировочное упражнение

$cos^7x+sin^4=1$

Ответ:$\Pi/2+\Pi k$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$sin3x+cos3x=\_3\sqrt{2}+2sin18xsinx+2cosx$

Решение.

Оценим выражение $A=sin18xsinx+cosx$, запишем его в следующем виде

$\sqrt{1+sin^218x}(sin18x/(\sqrt{1+sin^218x})sinx+1/\sqrt{1+sin^2x}\ cosx)$, вычислим значение выражения $(sin18x/\sqrt{1+sin^218x})^2+(1/\sqrt{1+sin^218x})^2$, которое равно 1, значит можно предположить, что

$sin18x/\sqrt{1+sin^218x}=sina;1/\sqrt{1+sin^218x}=cosa$

где $a\in[0;2\Pi)$, значит рассматриваемое выражение примет вид

$A=\sqrt{1+sin^218x}\ cos(x-a)$, очевидно, что

$|A|\le\sqrt{2}$, тогда

$3\sqrt{2}+2sin18xsinx+2cosx=3\sqrt{2}+A\ge\sqrt{2}$, с другой стороны

$sin3x+cos3x=\sqrt{2}cos(\Pi/4-3x)\le\sqrt{2}$

Решим систему из уравнений 1 и 2:

1. $sin3x+cos3x=\sqrt{2}$
2. $3\sqrt{2}+2sin18xsinx+2cosx=\sqrt{2}$

Из 1-ого уравнения

$3x=\Pi/4+2\Pi k$, $k\epsilon z$, отсюда

$18x=3\Pi/4+12\Pi k$, $k\epsilon z$;$sin18x=-1$

Подставим найденное значение во второе уравнение

$3x=\Pi/4+2\Pi k$, $k\epsilon z$; $x=\Pi/12+2\Pi k/3$, $k\epsilon z$

$cosx-sinx=-\sqrt{2}$; $x=3\Pi/4+2\Pi n$, $n\epsilon z$

$\Pi/12+2\Pi k/3=3\Pi/4+2\Pi n$

$K=3n+1$

Ответ: $3\Pi/4+2\Pi n;n\epsilon z$

Тренировочное упражнение

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}+\sin^4 x$

Ответ : $\Pi/2+2\Pi k$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$2\arcsin x=-\Pi-(x+1)^2$

РЕШЕНИЕ.

$\arcsin x=-\Pi/2-1/2(x+1)^2$, оценим выражение $-\Pi/2-1/2(x+1)^2\le-\Pi/2$ и одновременно

$-\Pi/2\le\arcsin x\le\Pi/2$

$-\Pi/2-1/2(x+1)^2=-\Pi/2$

Ответ: -1

Тренировочные упражнения

----

a)$\arccos x=\Pi+(x+1)^4$

Ответ: -1

b)$\operatorname{arctg} x\le\Pi/2+x^2$

Ответ: нет решений

Решим уравнение

$\cos(\arccos(4x-9))=x^2-5x+5$

Решение.

$\cos(\arccos(4x-9))=4x-9$

$|4x-9|\le1$

$4x-9=x^2-5x+5$

$x1=2$, $x2=7$- не принадлежит OD3

Ответ: 2

Тренировочные упражнения

----

a)$\sin(\arcsin 2x)=x+1$

Ответ: Нет решений

b)$\sin(\arcsin(x+2))=x+2$

Ответ: [-3;-1]

Решим уравнение

$(\arccos x)^2-6\arccos x+8=0$

Решение.

Пусть $\arccos x=t$, $t\in[0;\Pi]$, получим

$T^2-6t+8=0$

$T1=2$, $t2=4$- не принадлежит ОДЗ

$\operatorname{Arccos} x=2$, $x=\cos 2$

Ответ: cos2

Тренировочные упражнения

----

a)$\arcsin(2x-15)=\arcsin(x^2-6x-8)$

Ответ: 7

b)$(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2=5\Pi^2/36$

Ответ: ½;√3/2

Решим уравнение

$$2\arccos\sqrt{1-x^2/5}=\arcsin 2x/5$$

Решение

ОДЗ $1-x^2\geq 0$ $x\in[-\sqrt{5}/5;\_5/5]$

$\sin(2\arccos\sqrt{1-x^2/5})=\sin(\arcsin 2x/5)$

$2\sin(\arccos\sqrt{1-x^2/5})\cos(\_\arccos\sqrt{1-x^2/5})=2x/5$

$\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2/5})^2}\ \sqrt{1-x^2/5}=x/5$

$1-(\sqrt{1-x^2/5})^2(1-x^2/5)=x^2/25$

$(1-(1-x^2/5))(1-x^2/5)=x^2/25$

$(1-x+x^2/5)(1-x^2/5)=x^2/25$

$x^2/5-x^4/25=x^2/25$

$x^2(1/5-x^2/25)-1/25=0$

$x1=0$, $x2,3=\pm 2$ - не принадлежат ОДЗ

Ответ: 0

Тренировочные упражнения

а)$2\arccos\sqrt{1-x^2}=\arcsin 2x$

Ответ: 0

b)$2\arccos\sqrt{1-16x^2}=\arccos\sqrt{1-12x^2}$

Ответ: 0

в)$\arccos(x\sqrt{3})+\arccos x=\Pi/2$

Ответ: ½

г)$\arcsin 2x+\arcsin x=\Pi/3$

Ответ: $\sqrt{3}/28$

Решим уравнение

$$\arcsin(1+2\cos x)=\Pi/2-\arccos(1+3\operatorname{tg}x)$$

Решение.

$\sin(\arcsin(1+2\cos x))=\sin(\Pi/2-\arccos(1+3\operatorname{tg}x))$

$1+2\cos x=1+3\operatorname{tg}x$

$2\cos^2x=3\sin x$

$2\sin^2x+3\sin x-2=0$

$\sin x=1/2$; $x=(-1)^m\Pi/6+\Pi m$, $m\in z$

$\sin x=-2$ не имеет решения

При m-чётном и нечётном получим 2 решения

$x=\Pi/6+2\Pi k$, $k\in z$

$x=5\Pi/6+2\Pi n$, $n\in z$

Исходя из определения обратной функции, очевидно, что первое решение не входит в ОДЗ.

Ответ: $5\Pi/6+2\Pi n$, $n\in z$

Тренировочное упражнение

$Arcsin(П/6+ctgx)+arccos(6/П+tgx)=П/2$

Ответ $-arctg6/П+Пk$, $k\epsilon z$

Решим уравнение

$$\cos(2x+20^0)-\cos(2x+200^0)=3$$

Решение.

$\cos(2x+200^0)=-\cos(2x+20^0)$

$4\sin(2x+20^0)+\cos(2x+20^0)=3$

$\sqrt{}17\sin(2x+20^0+a)=3$, где

$a=\arcsin1/\sqrt{}17$

$2x+20^0+a=(-1)^n\arcsin3/\sqrt{}17+Пn$

Ответ: $-П/18-1/2\arcsin1/\sqrt{}17+1/2(-1)^n\arcsin3/\sqrt{}17+П/2n$, $n\epsilon z$

Тренировочное упражнение

$3\sin(x-П/3)+4\sin(x+П/6)+5\sin(5x+П/6)=0$

Ответ: $П/8+1/4\arcsin4/5$, $n\epsilon z$

$П/36-1/6\arcsin4/5+Пn/8$, $n\epsilon z$

Решим уравнение

$$\sin^4x+\cos^4x=3-\cos6x/4$$

Решение.

Выделим квадрат двучлена в левой части уравнения

$(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2\cos^2x=3-\cos6x/2$

$1-1/2\sin^22x=3-\cos6x/4$

Понизим степень синуса и после преобразований, получим

$Cos6x=-\cos4x$

$Cos6x=\cos(П-4x)$

$6x\pm П-4x=2Пn$, $n\epsilon z$

$2x1=-П+2Пn$

$x1=-П/2+Пn$, $n\epsilon z$

$10x2=П+2Пn$, $n\epsilon z$

$x2=П/10+Пn/5$, $n\epsilon z$

Ответ: $–П/2+Пn$, $n\epsilon z$

$П/10+Пn/5$, $n\epsilon z$

Тренировочное упражнение

$Sin^42x+\cos^42x-2\sin4x+3/4\sin^24x=0$

Ответ: $(-1)^n/4\arcsin(4-2\sqrt{}3)+Пn/4$, $n\epsilon z$

Решим уравнение

$$\sin^{6(}2x-3)/2+\cos^{6(}2x-3)/2=7/16$$

Решение.

Используя тождество

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+1)$, где

$a=\sin^22x-3/2$; $b=\cos^22x-3/2$

$a+b=\sin^{2(}2x-3)/2+\cos^{2(}2x-3)/2=1$

$1-\sin^{2(}2x-3)/2\cos^{2(}2x-3)/2=7/16$

$\sin^2(2x-3)=(\sqrt{3}/2)^2$

$(\sin(2x-3)-\sqrt{3}/2)(\sin(2x-3)+\sqrt{3}/2)=0$

$\sin(2x-3)=\sqrt{3}/2$

$2x-3=\pm\arcsin\sqrt{3}/2+\Pi n$, $n\epsilon z$

$x=3/2\pm\Pi/6+\Pi n/2$, $n\epsilon z$

$\sin(2x-3)=-\sqrt{3}/2$

$2x-3=\pm\arcsin(-(\sqrt{3}/2)+\Pi k$, $k\epsilon z$

$x=\pm3/2-+\Pi/6+\Pi k/2$, $k\epsilon z$

Ответ : $3/2\pm\Pi/6+\Pi n/2$, $n\epsilon z$

Тренировочные упражнения

----

a)$\cos7\Pi x\sin6\Pi x=\cos5\Pi x\sin8\Pi x$

Ответ: $n/2$, $n\epsilon z$

b)$\cos x\cos x/2\cos3x/2-\sin x\sin x/2\sin3x/2=1/2$

Ответ: $-\Pi/2+2\Pi n$, $n\epsilon z$
$\Pi/6+2\Pi k/3$, $k\epsilon z$
$-\Pi/4+\Pi l$, $l\in z$

Решим уравнение

$$4\cos x\cos2x\cos5x+(1+tg2xtgx)/(ctgx+tgx)=\cos6x+1/2tg2x$$

Решение.

ОDЗ:$\sin x\neq0$, $\cos x\neq0$, $\cos2x\neq0$,

$Ctgx+tgx\neq0$, упростим выражение

$A=(1+tg^2xtgx)/(ctgx+tgx)$

$1+tg2xtgx=(\cos2x\cos x+\sin2x\sin x)/\cos2x\cos x=\cos x/\cos2x\cos x=1/\cos2x$

$ctgx+tgx=1/\cos2x$

$ctgx+tgx=(\cos^2x+\sin^2x)/\sin x\cos x=2/\sin2x$

$A=\sin2x/2\cos2x=1/2tg2x$

После пруобразования получим уравнение

$4\cos x\cos2x\cos5x+1/2tg2x=\cos6x+1/2tg2x$

$4\cos x\cos2x\cos5x=\cos6x$

$2\cos2x(2\cos x\cos5x)=\cos6x$

$2\cos2x\cos6x+(2\cos2x\cos4x)=\cos6x$

$2\cos2x\cos6x+\cos6x+\cos2x=\cos6x$

$2\cos6x\cos2x+\cos2x=0$

$\cos2x(2\cos6x+1)=0$

$\cos2x=0$ - не принадлежит ОДЗ , $\cos6x=-1/2$, $x=\pm\Pi/9+\Pi n/3$, $n\epsilon z$

Ответ: $\pm\Pi/9+\Pi n/3$, $n\epsilon z$

Тренировочные упражнения

----

a)$2ctg2x-3ctg3x=tg2x$

Ответ: нет реш-ий

b)$\sin x/2\cos2x=1$

Ответ: $\Pi+4\Pi n$, $n\epsilon z$

Решим уравнение

$$\sin(x+5)+\cos(x-a)=\cos(x+7)$$

Решение.

Раскроем синус и косинус суммы и разности и сгруппируем, чтобы получить

$\sin x(\cos5+\sin2+\sin7)+\cos x(\sin5+\cos2-\cos7)=0$,

т.к. $\cos5>0$, $\sin2>0$, $\sin7>0$,

Cos5+sin2+sin7>0

Это равносильно

Tgx=cos7-sin5-cos2/sin2+cos5+sin7

X=arctgcos7-sin5-cos2/sin2+cos5+sin7+Пn nєz

Ответ: arctgcos7-sin5-cos2/sin2+cos5+sin7+Пn, nєz

Тренировочное упражнение

----

a(sinx+cosx)=b(cosx-sinx)

Ответ: arctgb-a/b+a+Пn , nєz

Решим уравнение

(sinx+cosx-1)/(sinx+cosx-2)=4(sinx+cosx)/(9-3sin2x)

Решение.

sinx+cosx=√2cos(x-П/4)

Пусть sinx+cosx=y>0

$Sin^2x+cos^2x+2sinxcosx=y^2$

$Sin2x=y^2-1$

$(y-1)/(y-2)=4y/(9+3(1-y^2))$

y1=2/3, y2=-3-не принадлежит ОДЗ, вернемся к замене

sinx+cosx=2/3 ; √2cos(x-П/4)=2/3

cos(x-П/4)=2/3√2

x=П/4±arccos2/3√2+2Пn, nєz

Ответ: П/4±arccos2/3√2+2Пn, nєz

Тренировочное упражнение

$Tgx=tg^3(П/4-x/2)$

Ответ: П/2-+arctg√2/2+2Пn, nєz

Решим уравнение

----

cos(Пlgx)+sin(Пlgx)=1

Решение.

Преобразуем уравнение

Sin(Пlgx+П/4)-1/√2

$Пlgx+П/4=П/4(-1)^n+Пn$, nєz

$Lgx=-1/4+1/4(-1)^n+n$, nєz

$X=10^{-1/4+1/4(-1)_n+n\ ,\ nєz}$

Если n=2k, то $x=10^{2k}$

Если n=2k+1 ,то $x=10^{1/2+2k}$, kєz

Ответ:

если n=2k, то $x=10^{2k}$

если n=2k+1, то $x=10^{1/2+2k}$, kєz

Тренировочное упражнение

Tg(Пarctgx)=1

Ответ : tg1/4;tg5/4;-tg3/4

Решим уравнение

$arcsin\ 2^{x+2}+arcsin(4\sqrt{3}*2^k)=П/2$

Решение.

Пусть $2^{x+2}=y>0$

Получим уравнение arcsiny+arcsiny√3=П/2

$\Pi/2$-arcsiny=arcsiny$\sqrt{3}$
($0<y\sqrt{3}\le 1$);sin($\Pi/2$-arcsiny)=y$\sqrt{3}$
cos(arcsiny)=y$\sqrt{3}$

$\sqrt{1-y^2}=y\sqrt{3}$
$1-y^2=3y^2$, $y=\pm 1/2$
-1/2 не принадлежит ОДЗ
$2^{x+2}=1/2$; x+2=-1;x=-3

Ответ: -3

Тренировочное упражнение

$\sqrt[3]{1+\lg tg}+\sqrt[3]{1-\lg tgx}=2$

Ответ: $\Pi/4+\Pi n$, nϵz

Дополнительные задания для самостоятельного решения
----

1)$\sin^2 2x=1/2$ Ответ:$(-1)^n\Pi/4+\Pi n$, nϵz
2)1/sinx/2-1/sinx=1/sin2x

Ответ: $2\Pi(2k+1)/7$; $k\neq 7t+3$

3)$\sin^2x+\sin^2 3x/2+\sin^2 2x+\sin^2 5x/2=2$

Ответ:$\Pi+2\Pi k$, kϵz;$\Pi/2+\Pi l$;$\Pi/7+2\Pi m/7$;выполнив отбор корней, получим

$\Pi/7+2\Pi l$;$\Pi/2+\Pi l$, l$\in$z

4)$\cos^4x+3\sin x-\sin^4x-2=0$

Ответ: $\Pi/2+2\Pi k$;kϵz
$(-1)^n\Pi/6+\Pi n$, nϵz

5)$2\cos^2x+4\cos x=3\sin^2x$

Ответ: $\pm$arccos$-2+\sqrt{19}/5+2\Pi k$, kϵz

6)5sinxtgx-sinx-5tgx+1=0

Ответ: arctg1/5+Πk , kϵz

7)$\sin^3x+\cos^3x=\sin(x+\Pi/4)$

Ответ: $\Pi/4+\Pi n$, nϵz
$(-1)^k\arcsin(2-\sqrt{2})+\Pi k$, k$\epsilon$z

8)$\sin^2x(tgx+1)=3\sin x(\cos x-\sin x)+3$

Ответ:$-\Pi/4+\Pi m$, m$\in$z
$\pm\Pi/3+\Pi n$, nϵz

9)1-sinxcosx=sinx-cosx

$\Pi+2\Pi k$, kϵz;$\Pi/2+2\Pi n$, nϵz
Объединив корни, получим $(1+(-1)^l)\Pi/4+\Pi l$, l $\in$z

10)$\sin^3x+\cos^3x=\sin^4x-\cos^4x$

Ответ: $-\Pi/4+\Pi k$, kϵz;$(1+(-1)^l)\Pi/4+\Pi l$, l$\in$z

11)$2\sin^2x=\sin x\cos x+3\cos^2x$

Ответ: –arctg3/2+Πn , nϵz

12)$\sin 2x=1-3\cos^2x$

Ответ: arctg$(1-\sqrt{3})+\Pi k$, kϵz
arctg$(1+\sqrt{3})+\Pi n$, nϵz

13)$\sin x\cos x+\sin^2x+8\cos^2x=5$

Ответ: –arctg3/4+Πk , kϵz
$\Pi/4+\Pi n$, nϵz

14)$1/3\cos^2x(ctgx-1)=\cos x(\sin x+\cos x)+1$

Ответ: $\Pi/4+\Pi k$, kϵz,
$\pm\Pi/6+\Pi n$, nϵz

15)1-cos2x+tgx/1-tgx=1+sin2x

Ответ: -П/4+Пn , nєz,
Arctg1/2+Пm , mЄz

16)sin2x+cos2x+1=0

Ответ: $(-1)^{k+1}$П/8-П/8+Пk/2 , kєz

17)12cosx-5sinx+13=0

Ответ:-arccos12/13+П(2k+1),kєz

18)sin2x+cosx=1-sin2x

Ответ: $(-1)^{k}$П/4-П/4+Пk , kєz

19)(3+4cos2x)/√cosx=-2√cosx

Ответ: ±arccos1/4+2Пk , kєz

20)sin3x/2cosx+cos3x=ctg(5П+x)

Ответ: (П/4+Пn/2, nєz

21)arcsin3/5x+arcsin4/5x=arcsinx

Ответ: ±1

22)arctgx+arctgx/2+arctgx^2/7=0

Ответ: 0

23)2arcsinx+arccos(1-x)=0

Ответ: 0